משפטים יסודיים עבור התכנסות במידה שווה

למה

אם $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ ו $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ במידה שווה בתחום $x \subseteq \mathbb{R}$, אז לכל $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha f + \beta g$ במידה שווה בתחום X.

הוכחה

$$\left|\left(\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)\right)-\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\right| = \left|\alpha\left(f_n(x)-f(x)\right)+\beta\left(g_n(x)-g(x)\right)\right|$$

$$\left|\left(\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)\right)-\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\right| \overset{\text{אש"מ}}{\leq} |\alpha|\overbrace{|f_n(x)-f(x)|}^{\leq\varepsilon_n\to\infty}+|\beta|\overbrace{|g_n(x)-g(x)|}^{\leq\delta_n\to\infty}$$

$$\left|\left(\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)\right)-\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\right| \leq |\alpha|\varepsilon_n+|\beta|\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in X:\ \left|\left(\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)\right)-\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן: $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha f + \beta g$ במידה שווה בתחום X.

$\blacksquare$

משפט (גזירה איבר איבר, עבור סדרת פונקציות)

נניח שהתכונות הבאות מתקיימות בקטע סגור $[a,b]$.

1. f_n פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$.
2. סדרת הפונקציות f_n' מתכנסת במידה שווה.
3. הפונקציה $f_n(x)$ מתכנסת לפחות בנקודה אחת c.

אזי:

1. קיימת פונקציה f כך ש: $f_n \longrightarrow f$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.
2. $f_n' \longrightarrow f'$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

הוכחה

יהיו $n,m \in \mathbb{N}$.

עפ"י הערך הממוצע עבור הפונקציה $f_n(x)-f_m(x)$, לכל $x\neq t\in[a,b]$, קיימת נקודה $d\in(x,t)$ (או (t,x)) עבורה מתקיים:

$$(*):\ \frac{(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(t)}{x-t}=(f_n-f_m)'(d)=f_n'(d)-f_m'(d)$$

בפרט, עבור $t\coloneqq c$, קיימת נקודה $d\in(x,c)$ (או (c,x)) עבורה מתקיים:

$$f_n(x)-f_m(x)=\overbrace{(x-c)}^{\leq b-a}\cdot\left(f_n'(d)-f_m'(d)\right)+\left(f_n(c)-f_m(c)\right)$$

יהי $0<\varepsilon$.

עפ"י קריטריון קושי, עבור ההתכנסות במידה שווה של הסדרה $f_n{}'$, קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N_1\leq n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים: $|f_n'(d)-f_m'(d)|<\varepsilon$.

עפ"י קריטריון קושי עבור התכנסות הסדרה של $f_n(c)$, קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N_2\leq n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים: $|f_n(c)-f_m(c)|<\varepsilon$.

נגדיר: $N\coloneqq\max\{N_1,N_2\}$. לכל $N\leq n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq(b-a)\cdot\varepsilon+\varepsilon=\overbrace{(b-a+1)}^{\text{קבוע}}\cdot\varepsilon$$

לכן, ע"י קריטריון קושי, הסדרה f_n מתכנסת במידה שווה בקטע $[a,b]$.

תהי f פונקציית הגבול. כלומר: $f_n\xrightarrow{n\to\infty}f$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

יהי $x\in[a,b]$.

נגדיר:

$$g_n(t)\coloneqq\begin{cases}\dfrac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}\ , & t\neq x\\ f_n'(x)\ \ , & t=x\end{cases}$$

$$g(t)\coloneqq\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\ , & t\neq x\\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)\ , & t=x\end{cases}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, הפונקציה $g_n(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, שכן היא מנה של רציפות עבור $t\neq x$ ועפ"י ההגדרה עבור $t=x$.

לכל $n \in \mathbb{N}$, $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ בכל נקודה, ולמעשה במידה שווה.

בתחום $[a,b]/\{x\}$, ההתכנסות היא במידה שווה עפ״י $(*)$:

לכל $x \neq t$, קיים $d \in (x,t)$ (או (t,x)) עבורו מתקיים:

$$g_n(t) - g_m(t) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)}{x - t} = f_n'(d) - f_m'(d)$$

f_n' מתכנסת במידה שווה, לכן עפ״י קריטריון קושי, לכל ε קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|g_n(t) - g_m(t)| = |f_n'(d) - f_m'(d)| < \varepsilon$$

לכן, עפ״י קריטריון קושי, g_n מתכנסת במידה שווה בתחום $[a,b]/\{x\}$.

בתחום $\{x\}$, עפ״י ההגדרה $g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$. ההתכנסות היא בתחום בכולל נקודה אחת, לכן ההתכנסות הא במידה שווה (**תרגיל:** בדוק!).

<u>טענה</u>

אם $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ במידה שווה בתחום A ו - $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ במידה שווה בתחום B, אזי $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ במידה שווה בתחום $A \cup B$.

<u>הוכחה</u>

נסמן:

$$\varepsilon_n := \sup_{x\in A} |g_n(x) - g(x)|$$

$$\delta_n := \sup_{x\in B} |g_n(x) - g(x)|$$

עפ״י משפט, מתקיים:

$$\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\delta \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, לכל $x \in A \cup B$ מתקיים:

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \max\{\varepsilon_n, \delta_n\}$$

$$|g_n(x)-g(x)| \le \overbrace{\varepsilon_n+\delta_n}^{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{x\in A\cup B} |g_n(x)-g(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן, $g \xrightarrow{n\to\infty} g_n$ במידה שווה בתחום $A\cup B$.

$\square$

לכן, g היא גבול במידה שווה של הפונקציות הרציפות g_n, לכן עפ"י משפט g רציפה, לכן:

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = g(t) \xrightarrow{t\to x} g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

לכן, f גזירה ב – x ומתקיים:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

$\blacksquare$

משפט (גזירה איבר איבר עבור טורים)

נניח שהתכונות הבאות מתקיימות בקטע הסגור $[a,b]$.

1. f_n פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$.
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.
3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לפחות בנקודה אחת c.

אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.
2. מתקיים: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

הוכחה

עפ"י המשפט הקודם (גזירה איבר איבר עבור פונקציות) עבור הפונקציות:

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

s_n גזירות בקטע $[a,b]$ כסכום סופי של פונקציות גזירות.

■

דוגמה

דוגמה נגדית למשפט כאשר תנאי (3) לא מתקיים.

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)$$

אינו מתכנס באף נקודה $x\in\mathbb{R}$.

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

מתכנס במידה שווה בכל קטע סופי $[a,b]$:

נסמן $c\coloneqq\max\{|a|,|b|\}$. אז לכל $x\in[a,b]$:

$$\left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right|\le\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$$

והטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$$

מתכנס (למשל, עפ"י מבחן המנה).

□

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

מקיים את תנאי המשפט $(3)-(1)$, לכן עפ"י המשפט:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)' \overset{\text{משפט}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{\substack{k:=n-1\\ n=k+1}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

בהמשך הקורס נראה כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

■

דוגמה

נחשב את הסכום:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n\ , \qquad x\in(-1,1)$$

חישבנו בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1, בעזרת מכפלת טורים.

$$n\cdot x^n = x\cdot n\cdot x^{n-1} = x\cdot (x^n)'$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n \overset{\text{משפט}}{=} x\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n = x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n = x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}$$

נוודא קיום תנאי המשפט: בקטע $(-1,1)$ הטורים לא מתכנסים במידה שווה, אבל: בכל תת קטע סגור $[-c,c] \subseteq (-1,1)$ הטורים מתכנסים במידה שווה (מהשוואה לטורים הרגילים $\sum c^n, \sum n \cdot c^n$).

כעת, לכל $x \in (-1,1)$, קיים $0 < c < 1$ כך ש: $x \in [-c,c]$, לכן הנ"ל מתקיים עבור x.

הערה: זו הוכחה פורמלית למה שראינו במבוא להסתברות וסטטיסטיקה, לגבי תוחלת של התפלגות גאומטרית.

■

משפט

קיימת פונקציה רציפה ב - $\mathbb{R}$ שאינה גזירה באף נקודה.

הוכחה

תהי $\varphi(x) \coloneqq |x|$ בקטע $[-1,1]$.

נרחיב אותה לפונקציה מחזורית על $\mathbb{R}$ עפ"י ההגדרה $\varphi(x+2) \coloneqq \varphi(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הפונקציה שנגדיר:

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \varphi(4^n \cdot x)$$

נמשיך בהרצאה הבאה.

■