תרגיל 4

1. תהי $A=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עבור $p\notin\mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau=P(\mathbb{R})\cup\{B\subseteq A:|B^c|\leq\aleph_0\}$.
הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה. הראו שהיא האוסדורפית ושכל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $X,\ A\neq\emptyset$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

(ב) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X,τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

3. נציג את ההוכחה של פרופ' הילל פורסטנברג מהאוניברסיטה העברית לכך שיש אינסוף ראשוניים. הוא גילה אותה בעודו סטודנט לתואר ראשון והיא התפרסמה בירחון של האגודה המתמטית של ארצות הברית! (יש לאן לשאוף).
עבור $a\in\mathbb{Z}$ ו-$d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ נגדיר את $S_{a,d}$ להיות הסדרה החשבונית

$$S_{a,d}:=\{a+dn\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

נגדיר טופולוגיה על השלמים על ידי:

$$\tau_f:=\{O\subseteq\mathbb{Z}\mid\forall n\in O\,\exists\, d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}:S_{n,d}\subseteq O\}$$

(במובן לא בדיוק פורמלי, $S_{a,d}$ הוא סוג של כדור ב"רדיוס" d סביב a).

(א) הראו ש-$(\mathbb{Z},\tau_f)$ הוא אכן מרחב טופולוגי.

(ב) הראו שהקבוצה $S_{a,d}$ תמיד סגוחה (סגורה וגם פתוחה)

(ג) נסמן $A:=\bigcup_p S_{0,p}$ כאשר p רץ על כל הראשוניים. הראו כי $A^c=\{-1,1\}$.

(ד) הסיקו שקיימים אינסוף ראשוניים.

4. בונוס: נסתכל על וריאציה של ההוכחה של פורסטנברג שהוצגה על ידי סולומון גולומב כמה שנים לאחר מכן.

(א) לפני שמתחילים

i. נסמן את המכנה המשותף הגדול ביותר של $a, b \in \mathbb{Z}$ על ידי (a, b).

ii. לכל $a, b \in \mathbb{Z}$ קיימים $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש-$(a, b) = ax + by$ (תוצאה של האלגוריתם האוקלידי).

iii. משפט דיריכלה אומר (בין היתר) שאם $(a, b) = 1$ אז ב-$S_{a,b}$ קיימים אינסוף ראשוניים.

(ב) נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\tau_g := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall n \in O \, \exists \, d \in \mathbb{Z}^* : (n, d) = 1 \wedge S_{n,d} \subseteq O\}$$

הראו שזו אכן טופולוגיה.

(ג) האם τ_g חזקה או חלשה מ-τ_f.

(ד) השתמשו בטופולוגיה זו כדי להוכיח שישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

(ה) הראו ש-τ_g היא האוסדורף (T_2) אבל לא T_3
<u>הערה:</u> אנחנו נגיד שמרחב טופולוגי (X, τ) מקיים את T_3 אם לכל $x \in X$ וכל קבוצה סגורה $A \subseteq X$ כך ש-$x \notin A$ קיימות $U, V \in \tau$ כך ש-$x \in U, A \subseteq V$ ו-$U \cap V = \emptyset$.

(ו) נסחו את משפט דריכלה באמצעות הטופולוגיה הזו והראו שהניסוח שלכם שקול.

(ז) <u>הערה:</u> גולומב הראה אפילו שהטופולוגיה הזו קשירה! (תלמדו את המושג הזה בקרוב). לא טריוויאלי למצוא טופולוגיה האוסדורפית קשירה על הטבעיים.