תרגיל 10 באלגברה לינארית להנדסה

1. יהי $V = M_2(\mathbb{R})$ ו-$A \in V$.

(א) הוכיחו כי $T : V \to V$ המוגדרת ע"י $T(M) = AM$ היא העתקה לינארית.

(ב) עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Im}(T)$ ו-$\mathrm{Ker}(T)$.

2. בדקו האם ההעתקות הבאות לינאריות:

(א) $T(x, y) = (x, -y, 0) \qquad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

(ב) $T(x, y, z) = (x + y, x - 2z) \qquad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

(ג) $T(p(x)) = (xp(x))' \qquad T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
כאשד הכוונה ב-$(f(x))'$ היא לנגזרת של f לפי x.

(ד) $T(x, y, z) = (sin(x), y + 2z) \qquad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

(ה) $T : V \to V$ כאשר $V = M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $T(A) = A - A^t$

3. מצאו העתקה לינארית T המקיימת את הדרישות או הוכיחו שלא קיימת: (יש להגיע לצורה מפורשת של ההעתקה, כלומר להראות למה שווה $T(v)$ לכל וקטור v במרחב המקור)

בנוסף, אם מצאתם העתקה לינארית כדרוש, קבעו האם זו ההעתקה הלינארית היחידה המקיימת את הדרישות, האם היא על, האם היא חח"ע (חד-חד ערכית) והאם היא איזומורפיזם.

(א) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המקיימת $T(0, 0, 1) = -2, T(1, 1, 1) = 3, T(0, 1, -2) = 1$.

(ב) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת
$T(1, 0) = (3, 1), T(0, 1) = (1, 2), T(1, 1) = (3, 4)$

(ג) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ המקיימת $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Sp}\{(1, 0, 1), (2, -1, 1)\}$

(ד) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Sp}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$

(ה) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ המקיימת $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^5$

(ו) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ המקיימת $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Sp}\{(1, 2, 0, -4), (4, 0, 1, -1)\}$

(ז) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ המקיימת $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Sp}\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$
ו- $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Sp}\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0)$

(ח) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת
$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Sp}\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$
ו- $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Sp}\{1, x^2\}$.

4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו:

(א) נגדיר $S : V \to V$ ע"י הכלל $S(v) = T(T(v))$. הוכיחו כי S לינארית. S תסומן להבא כ-T^2.

(ב) $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^2)$

(ג) $\mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)$