

## מבוא לחוגים ומודולים-בוחר

עליכם לענות על כל השאלות.  
בהצלחה!

1. יהי  $R$  חוג קומוטטיבי ו- $I \trianglelefteq R$ . נגדיר את הרדיקל של  $I$  להיות:

$$\text{rad}(I) = \{x \in R \mid \exists 0 \neq n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) (5 נקודות)  $I \subseteq \text{rad}(I)$

(ב) (10 נקודות)  $\text{rad}(I)$  הוא אידיאל.

(ג) (15 נקודות)  $\text{rad}(\text{rad}(I)) = \text{rad}(I)$

(ד) (20 נקודות) בחוג המנה  $R/\text{rad}(I)$  אין איברים נילפוטנטיים שונים מ-0.

2. (20 נקודות) הוכיחו:  $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]/4\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

3. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: יהיו  $R, S$  חוגים, ו- $\varphi : R \rightarrow S$  אפימורפיזם. אזי:

(א) (15 נקודות) אם  $P \trianglelefteq S$  אידיאל ראשוני, אז  $\varphi^{-1}(P) \trianglelefteq R$  אידיאל ראשוני.

(ב) (15 נקודות) אם  $P \trianglelefteq R$  אידיאל ראשוני, אז  $\varphi(P)$  אידיאל ראשוני.