תרגיל

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$. יהי $g\left(x\right)$ פולינום cubic spline בנקודות

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

$$g'\left(a\right)=f'\left(a\right)$$

$$g'\left(b\right)=f'\left(b\right)$$

צ"ל:

$$\int_a^b\left[g''\left(x\right)\right]^2\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b\left[f''\left(x\right)\right]^2\,\mathrm{d}x$$

פתרון

נגדיר $D\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$.

$$D'\left(a\right)=0\qquad D'\left(b\right)=0$$

$$0\leq i\leq n\qquad D\left(x_i\right)=0$$

$$\int_a^b\left[f''\left(x\right)\right]^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[g''\left(x\right)+D''\left(x\right)\right]^2\,\mathrm{d}x=$$

$$=\ +2\int_a^b g''\left(x\right)D''\left(x\right)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\left[D''\left(x\right)\right]^2\,\mathrm{d}x$$

נרצה להוכיח ש$\int_a^b g''\left(x\right)D''\left(x\right)\,\mathrm{d}x=0$. נשתמש באינטרציה בחלקים.

תזכורת: $\left(uv\right)'=u'v+uv'\overset{\int}{\Rightarrow}uv=u'v+\int uv'$

ובמקרה שלנו:

$$\int_a^b g''\left(x\right)D''\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\left[g''\left(x\right)D'\left(x\right)\right]_a^b-\int_a^b\left[g'''\left(x\right)D'\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}x=\cdots$$

$\left[g''\left(x\right)D'\left(x\right)\right]_a^b=0$ כי $D'\left(a\right)=D'\left(b\right)=0$.

$$\cdots=-\int_a^b\left[g'''\left(x\right)D'\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}x=-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[g'''\left(x\right)f'\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left[g'''\left(x\right)D\left(x\right)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[g''''\left(x\right)D\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}x\right)$$

כי... $\left[g'''(x)\,D(x)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0$ ו$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[g''''(x)\,D(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0$ כי g פולינום ממעלה שלישית.
$\int_a^b g''(x)\,D''(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ו$\int_a^b\left[D''(x)\right]^2\,\mathrm{d}x \geq 0$, לכן $\int_a^b\left[g''(x)\right]^2\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b\left[f''(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$.

קירובים

באינטרפולציה, אם יש $n+1$ נקודות דגימה אז

1. הפונקציה שאנו בונים חייבת לעבור דרך כל הנקודות.
2. אין לנו שליטה על המעלה של הפולינום - היא חייבת להיות n.

בקירוב, לעומת זאת, לא חייבים לעבור דרך כל הנקודות, והמעלה נתונה לבחירתנו.

נורמה של פונקציה

נניח שמצאנו קירוב p לפונקציה x. בשביל לבדוק אם הקירוב טוב, צריך למצוא נורמה - $\|f(x)-p(x)\|$.
כזכור, נורמה צריכה לקיים 3 תנאים:

- $\|f\| \geq 0$, ו$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$
- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

שיטת טור טיילור

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^i}{n!}$$

בשביל זה צריך את הפונקציה המקורית - אבל בד"כ בקירובים יש לנו את הפונקציה המקורית.

מינימקס

נגדיר נורמת אינסוף:

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

אנחנו רוצים למצוא את

$$\inf_{\deg(q) \leq n} \|f(x) - q(x)\|_\infty$$

כלומר למצוא את הפולינום ממעלה עד n שהמרחק שלו בנורמת אינסוף מf הוא מינימלי - כלומר שבנקודה שבה הם הכי רחוקים, המרחק הוא מינימלי.

מזעור ריבועי ההפרשים - Least Squares

הרעיון הוא למזער את האינטגרל של ריבועי ההפרשים בין הפונקציות.
נורמה 2 מוגדרת על ווקטור בתור

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |v_i|^2}$$

במקרה של פונקציה, יש לנו רצף של נקודות, ולכן נשתמש באינטגרל:

$$\|f(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

אנו רוצים למזער את הערך הזה:

$$\inf \|f(x) - r(x)\|_2$$

$$r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ואז

$$\|f - r\|_2 = \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) \mathrm{d}x}$$

$$F(a_0, a_1, \ldots a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right)^2 \mathrm{d}x$$

וצריך למצוא את המינימום. יש לנו $n+1$ משתנים($a_0, a_1, \ldots a_n$), ולכן צריך לגזור אותה לפי $n+1$ משתנים:

$$0 \le i \le n \qquad \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0$$

הנקודות שנקבל יהיו רק נקודות מינימום - לא נקבל נקודות מקסימום כי עבור כל משתנה, F היא פרבולה.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x - 2 \frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b f(x) \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right)^2 \mathrm{d}x = 0$$

נגזור כל מחובר בנפרד:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_a^b \left[f''(x)\right]^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial}{\partial a_i}\left[f''(x)\right]^2}_{=0} \,\mathrm{d}x = 0$$

$$-2\frac{\partial}{\partial a_i}\int_a^b f(x)\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = -2\int_a^b \frac{\partial}{\partial a_i} f(x)\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = -2\int_a^b f(x)\, x^i \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)^2 \mathrm{d}x = 2\int_a^b x^i \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \,\mathrm{d}x$$

ולכן

$$-2\int_a^b f(x)\, x^i \,\mathrm{d}x + 2\int_a^b x^i \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, x^i \,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b x^{i+j} \,\mathrm{d}x$$

זוהי נוסחה כללית - עכשיו צריך למצוא באמצעותה את כל הa_iים:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0 \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b x^j \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0 \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b x^{j+1} \,\mathrm{d}x = \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0 \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b x^{n+j} \,\mathrm{d}x = \int_a^b x^n f(x) \,\mathrm{d}x$$

ולכן צריך לפתור מערכת:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b 1 \,\mathrm{d}x & \int_a^b x \,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b x^n \,\mathrm{d}x \\ \int_a^b x \,\mathrm{d}x & \int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b x^{n+1} \,\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^n \,\mathrm{d}x & \int_a^n x^{n+1} \,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b x^{2n} \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \\ \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) \,\mathrm{d}x \end{bmatrix}$$

תרגיל(ממבחן 2010)

$f(x) = \ln x$ על הקטע $[1, e]$, צריך למצוא פולינום ממעלה 2.

1. טיילור

לא נתנו לנו x_0, ולכן נבחר אותו להיות אמצע הקטע - $x_0 = \frac{1+e}{2}$.

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$p_2(x) = \ln x_0 + \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{(x - x_0)^2}{2x_0^2}$$

$$p_2(x) = -0.8799 + 1.076x - 0.1447x^2$$

נמצא את השארית:

$$|R_3(x)| \le \left|\frac{f'''(\xi)(x - x_0)^3}{3!}\right| \qquad \xi \in [1, e]$$

$$= \left|\frac{2}{\xi^3} \cdot \frac{1}{6}(x - x_0)^3\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\xi^3}\left(x - \frac{1+e}{2}\right)^3\right|$$

אם נבחר $x = \xi = 1$ נקבל שהשגיאה היא 0.2114.

2. מזעור ריבועי ההפרשים

$$\begin{bmatrix} \int_1^e 1\,\mathrm{d}x & \int_1^e x\,\mathrm{d}x & \int_1^e x^2\,\mathrm{d}x \\ \int_1^e x\,\mathrm{d}x & \int_1^e x^2\,\mathrm{d}x & \int_1^e x^3\,\mathrm{d}x \\ \int_1^e x^2\,\mathrm{d}x & \int_1^e x^3\,\mathrm{d}x & \int_1^e x^4\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [xe - \ln x]_1^e \\ \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e \\ \int_1^e x^2 \ln x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix}$$

קיבלנו

$$r_2(x) = -0.9779 + 1.157x - 0.1597x^2$$

רוצים למצוא את השגיאה:

$$E(x) = \ln x + 0.9779 - 1.157x + 0.1597x^2$$

$$E' = \frac{1}{x} - 1.157 + 0.3194x = 0$$

$$E(1) = -0.0194$$

$$E(1.424) = 0.007638$$

$$E(2.198) = 0.006095$$

$$E(e) = 0.01288$$

נשים לב שהיינו צריכים לבדוק מקסימום גם בקצוות הקטע, לא רק בנקודות הקריטיות.

שיפור הדיוק באמצעות פולינומי צ'בישב

אם הקטע שלנו הוא $[-1,1]$, אז במקום להשתמש בפולינומים הרגילים בשביל לבנות את פולינום הקירוב, נשתמש בפולינומי צ'בישב:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

זו ההגדרה הרקרוסיבית - ואפשר להמשיך:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 4x^3 - x$$

פולינומי צ'בישב הם אורתוגונלים:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) - T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

אפשר להפוך את איברי הבסיס לפולינומי צ'בישב:

$$1 = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x))$$

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x))$$

$$\vdots$$

דוגמה

$$e^x = [-1, 1]$$

$$e^x = 1 + e + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = T_0\left(x\right) + T_1\left(x\right) + \frac{1}{4}\left(T_0\left(x\right) + T_2\left(x\right)\right) + \frac{1}{24}\left(3T_1\left(x\right) + T_3\left(x\right)\right) + \dots =$$

$$= 1.2661T_0\left(x\right) + 1.302T_1\left(x\right) + 0.2715T_2\left(x\right) + \dots =$$

$$= 0.9446 + 0.9973x + 0.5430x^2 + \dots$$