

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

13 באפריל 2016

תרגיל 4 - מ"מ, התפלגות בדידה, תוחלת ושונות

1. בבניין בן 5 קומות יש מעלית. 3 סטודנטים נכנסים יחד למעלית בקומת הכניסה ובחרים אקראית לאן הם עולים. רשמו את טבלת ההסתברות עבור הקומה הגבוהה ביותר שבה תעצור (דהיינו מהי ההסתברות שהקומה הגבוהה ביותר היא 1, מהי ההסתברות שהקומה הגבוהה ביותר היא 2 וכך הלאה).

2. מ"מ X מקבל את הערכים 0–4 בהסתברות $P(X = i) = \frac{k-i}{3k}$ $i = 0, 1, 2, 3, 4$. מצאו את הערך של k .

3. נתון מ"מ בדיד X בעל פונקציית ההסתברות

$$P(X = k) = \begin{cases} a \cdot k + b & k \in \{-1, 0, 1\} \\ 0 & k \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

כאשר $a, b \in [0, \infty)$ מספרים כלשהם. ידוע כי $E[X] = 0$. חשבו את השונות של X .

4. משתנה מקרי X מקבל את הערכים 0,2,4,6,8 בהסתברויות

i	0	2	4	6	8
P(X=i)	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

(א) מצאו את התפלגותם, את תוחלתם ואת שונותם של המשתנים

$$Z = (X - 2)^2 \text{ ו- } W = \frac{X+2}{X-2}, Y = \frac{X-2}{X+2}$$

אם הגעתם למסקנה שאחד המשתנים לעיל אינו משתנה מיקרי, נמקו מדוע.

(ב) חשבו את התוחלת של המשתנה X בעל ההתפלגות $\cdot \frac{1}{3}$.
 $P(X = x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$ כאשר $x = 1, 2, 3, \dots$

5. בכד יש ארבעה כדורים שחורים, שלושה כדורים לבנים ושני כדורים אדומים. מוציאים מתוך הכד מדגם של מספר הצבעים השונים המופיעים במדגם. נגדיר: X - ארבעה כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

(א) מצאו את ההתפלגות של X , התוחלת והשונות שלו.

(ב) נגדיר Y - מספר הכדורים האדומים במדגם. מהי התוחלת של Y ?

(ג) האם המשתנים X ו- Y תלויים? הוכיחו טענתכם.

6. בחבילה 30 כדורי תרופה. מהם 10 מזויפים. מותר לבדוק 2 כדורים.

מצאו פונקציית התפלגות, תוחלת ושונות של מספר הכדורים המזויפים (מבין השניים שנבדקו).

(א) כאשר הוצאת הכדורים מן החבילה היא הוצאה עם החזרה.

(ב) כאשר הוצאת הכדורים מן החבילה היא הוצאה בלי החזרה.

7. מטילים שתי קוביות הוגנות, יהי

X - התוצאה המקסימאלית

Y - התוצאה המינימאלית

(א) מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y . כלומר השלימו את הטבלה:

Y\X	1	2	3	4	5	6
1	$P(X=1, Y=1)=?$					
2						
3						
4			$P(X=3, Y=4)=?$			
5						
6						

(ב) מהי התוחלת של $W = X + Y$?

(ג) מהי השונות של X ?

8. בתיבה יש $2N$ כרטיסים. על שניים מהם כתוב "1" על שניים אחרים כתוב "2" וכך הלאה. בוחרים באופן אקראי m כרטיסים. מהי תוחלת מספר זוגות הכרטיסים שישארו בתיבה?

(הגדירו N משתנים מקריים: X_k כך ש: $X_k = 1$ אם הזוג שכתוב עליו " k " נשאר בתיבה ו- $X_k = 0$, אחרת. השתמשו במשתנים אלו לחישוב התוחלת).

9. תהי סדרה של משתנים מקריים המוגדרים באופן הבא :

$$X_0 = 1$$

$$\forall n = 1, 2, \dots \quad X_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{in probability } p \\ -X_{n-1} & \text{in probability } 1 - p \end{cases}$$

חשבו את פונקציית ההסתברות של X_n .

10. אדם אחד הטיל מטבע 10 פעמים עם הסתברות p להצלחה וקיבל X פעמים "ראש". אדם אחר הטיל אותה מטבע 5 פעמים וקיבל Y פעמים "ראש". נניח שידוע שכל 15 ההטלות הן ב"ת, חשבו $P(X = k | X + Y = 3)$ לכל הערכים k ש X יכול לקבל.

(הערה: "ראש" ו- "זנב" שקול ל "פאלי" ו-"עץ").

11. אלי מטיל מטבע n פעמים (כל הטלה בנפרד). בכל אחת מההטלות אם התוצאה המתקבלת היא אלי מטיל מטבע "ראש" אלי מקבל סוכרייה כפרס. אפרת לעומתו, מטילה (בנפרד) את המטבע פעם אחת בלבד. אם יתקבל בהטלה זו "ראש" היא תקבל כפרס את כמות סוכריות השווה למספר ה"ראשים" שקיבל אלי. אחרת, היא תקבל כמות סוכריות השווה למספר ה"זנבות" שהתקבלו בהטלותיו אלי. סמנו ב- X את המשתנה המקרי המייצג מספר הסוכריות שקיבל אלי וב- Y את המשתנה המקרי המייצג מספר הסוכריות שקיבלה אפרת.

(א) איך מתפלגים X ו- Y ? חשבו (בנוסף לכך) תוחלות ושונות.

(ב) מצאו תוחלת ושונות סך כל הפרסים, דהיינו $X + Y$ (הדרכה: הוכיחו כי השונות המשותפת $Cov(X, Y)$ שווה לאפס. ומשם הדרך קצרה מאוד מסעיף א).

(ג) הראו, ש X ו- Y תלויים. (הדרכה: הראו שישנם ערכים אפשריים (בעלי הסתברות חיובית) של X ו- Y שעבורם ההתפלגות המשותפת של המשתנים מקבלת את הערך 0 והסיקו לגבי התלות).