מבוא להסתברות וסטטיסטיקה - הרצאה 3

הסתברות מותנית

הסתברות למאורע כאשר ידוע שקרה מאורע אחר הקשור למאורע.

__דוגמא:__ ההסתברות למאורע "ירד גשם" משתנה כאשר ידוע המאורע "יש עננים".

סימון $P(A|B)$ (או $P(A/B)$) להסתברות שיקרה מאורע A כאשר B כבר קרה (בתנאי B, בהינתן B ...)

__הנוסחה לחישוב הס' מותנית__ (עקרון):

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

אפשר לחשוב על כך שמרחב המדגם שלנו Ω מצטמצם למאורע B. (נסמן Ω^*)

__דוגמא:__ נניח/בהינתן שהטלנו 2 קוביות, קיבלנו בקוביה הראשונה 5, מהי ההסתברות שנקבל בסכום הקוביות 9.

__פתרון:__ נגדיר B המאורע המתנה (בקוביה ראשונה קיבלנו 5)

A המאורע סכום קוביות 9.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$\Omega^* = \{(5,1),\dots,(5,6)\}$ $\quad A\cap B = \{(5,4)\}$

טענה:

$$P(A|B)+P(\bar{A}|B)=1$$

הוכחה: בשימוש בנוסח ההסתברות המותנית נקבל

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

אפשרות אחרת להגדרת הה' המותנית

היא בחוק הכפל

$$P(A\cap B)=\underbrace{P(B)}_{\text{שלב א' – קרה } B}\cdot\underbrace{P(A|B)}_{\text{שלב ב' – בהינתן ש-}B\text{ קרה גם }A\text{ קורה.}}$$

הכללה: אם $A_1,\dots,A_n$ מאורעות (בעלי הסתברות חיובית)

אז:

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n)=\underbrace{P(A_1)}_{\text{שלב א' – קרה }A_1}\cdot\underbrace{P(A_2|A_1)}_{\text{שלב ב' – בהינתן }A_1\text{ קרה }A_2\text{ מתרחש.}}\cdot\underbrace{P(A_3|A_2\cap A_1)}\cdots P(A_n|A_{n-1}\dots A_1)$$

Scanned by CamScanner

דוגמא:

ל $\frac{1}{3}$ מהתושבים שיער בלונדיני

ל $\frac{1}{4}$ " עיניים כחולות.

ל- $\frac{1}{5}$ גם בלונדיני וגם עיניים כחולות.

א. בוחרים באקראי תושב שיש לו עיניים כחולות, מהי ההסתברות שיש לו שיער בלונדיני?

ב. " " שאין לו שיער בלונדיני. מהי ההסתברות שאין לו עיניים כחולות?

פתרון: תחילה נמלא טבלה עזר

מאורע A - לתושב יש שיער בלונדיני.

B - לתושב יש עיניים כחולות.

	A שיער בלונדיני	$\bar{A}$ לא בלונדיני	
B - עיניים כחולות	$\boxed{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{20}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$
$\bar{B}$ - לא כחולות	$\frac{2}{15}$	$\frac{37}{60}$	$\frac{3}{4}$
	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$\boxed{1}$

א.

$$P(\underset{\text{שיער בלונ'}}{A}\,|\,\underset{\text{עיניים כחולות}}{B}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

ב.

$$P(\bar{B}\,|\,\bar{A}) = \frac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{37}{60}}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{37}{40}}$$

4

תרגילים בפרק המותנית

60% מהתושבים במדינה מסוימת הם מבוגרים והשאר צעירים. 70% מהמבוגרים תומכים בחוק חינוך חובה ו-80% מהצעירים תומכים בחוק. בוחרים באקראי תושב.

א. מהי ההס' שהוא מבוגר התומך בחוק חינוך חובה?

ב. " " " " אם ידוע שהוא תומך בחוק חינוך חובה?

פתרון: נגדיר מאורעות: A - מבוגר, $\bar{A}$ צעיר

B - תומך בחוק, $\bar{B}$ לא תומך.

נתון:

$$P(A)=0.6$$

$$P(B|A)=0.7 \qquad P(B|\bar{A})=0.8$$

$$\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0.7 \qquad \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=0.8$$

$$P(B\cap A)=0.42 \qquad P(B\cap\bar{A})=0.32$$

$\Rightarrow$

	$\bar{B}$	B	
0.6	0.18	0.42	A
0.4	0.08	0.32	$\bar{A}$
1	0.26	0.74	

א. $P(A\cap B)=0.42$

ב. $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.42}{0.74}=\frac{21}{37}$

$\approx 0.567567...$

③ ריס

מותנית - בעיה עם נעלמים

במשתלה פרחים אדומים וצהובים. חלק מיועדים לייצוא. ידוע כי $\frac{1}{6}$ מהפרחים הם אדומים המיועדים לייצוא. $\frac{1}{4}$ מבין הפרחים האדומים לייצוא, $\frac{2}{7}$ מבין שאינם לייצוא הם צהובים. בוחרים באקראי פרח:

א. מהי ההסת' שבחר אדום?

ב. " " שאינו מיועד לייצוא?

פתרון: נגדיר מאורעות.

A - פרח אדום

B - מיועד לייצוא.

נתון 1: $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

נתון 2: $P(B|A)=\frac{1}{4}$

נתון 3: $P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{2}{7}$

$$\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{4} \Longrightarrow P(A)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

מנתון 1

וזה בעצם הפתרון לסעיף א'.

ב.

$$P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=P(A)$$

$$\Rightarrow P(A\cap \bar{B})=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

מנתון 3:

$$\frac{P(\bar{A}\cap \bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{2}{7} \quad (*)$$

נסמן $P(\bar{B}) = x$.

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = x - \frac{1}{2}}$$

בסה״כ נציב ב (*) ונקבל:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2}{7}$$

$$7x - \frac{7}{2} = 2x \qquad 5x = \frac{7}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{7}{10}}$$

ולכן ההסתברות שפרי אינו מיועד ליצוא $P(\bar{B}) = \frac{7}{10}$.

חוק ב״ס

Thomas Bayes 18 (כומר ב״ס)

<u>נוסחת ההיפוך</u> מאפשרת מעבר מההסתברות של A בהינתן B להסתברות של B ״ A.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

<u>הוכחה:</u>

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \cdot \frac{P(B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Scanned by CamScanner

④

הוצאה ללא החזרה

דוגמא: בכד 3 כדורים שחורים ו5 לבנים

מוציאים 2 כדורים.

א. אם הכדור הראשון לבן מהי ההסתברות שהשני יהיה שחור?

3 שחורים
5 לבנים

ב. אם הכדור השני שחור מהי ההסת' שהראשון לבן?

(היסק הפוך)

פתרון:

א. A הוצאה בכדור הראשון לבן

B " " השני שחור.

$$P(B|A)=\frac{3}{7}$$

לבן $\frac{5}{8}$ שחור $\frac{3}{7}$

$$P(B\cap A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$$

$$P(A)=\frac{5}{8}$$

ב.

$$P(A|B)=\frac{\overset{3/7}{P(B|A)}\cdot \overset{5/8}{P(A)}}{P(B)}=\frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}}=\frac{15}{15+6}=\boxed{\frac{15}{21}}=\boxed{\frac{5}{7}}$$

שחור בשני:

לבן שחור + שחור שחור

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$$

ז"א הסיכוי של לבן בראשון עלה כשיודעים שהיה שחור בשני.

$\frac{5}{8}$ עלה ל $\frac{5}{7}$.

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=P(A|B)\cdot P(B)+P(A|\bar{B})\cdot P(\bar{B})$$

כאשר $B\cup\bar{B}$ הוא איחוד זר של Ω.

<u>הוכחה:</u>

$$\text{אגף ימין}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\cdot P(B)+\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}\cdot P(\bar{B})=$$

$$=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=P(A)=\text{אגף שמאל}$$

<u>הכללה:</u> נוסחת ההסתברות השלמה הכללית:
אם Ω מפורק לאיחוד זר $\biguplus B_i$ אז:

$$P(A)=\sum_i P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

<u>דוגמא:</u> מטילים מטבעות הוגנים בזה אחר זה עד להופעת העץ הראשון <u>ואז</u> בוחרים באקראי מטבע מבין אלה שהוטלו.
הראה שהסיכוי שהמטבע שנבחר ייתן "עץ" הוא בדיוק $\ln 2$

<u>פתרון:</u> נסמן ב- A_n ← המאורע בו הופיע "עץ" בהטלה ה-n-ית
נסמן ב- B את המאורע שבו נבחר עץ. $P(A_n)=\frac{1}{2^n}$

אז: $P(B|A_n)=\frac{1}{n}$ לפי ההכללה לעיל:

$$P(B)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B|A_n)\cdot P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\boxed{\ln 2}$$

הצבת $x=\frac{1}{2}$ בטור מוכר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$