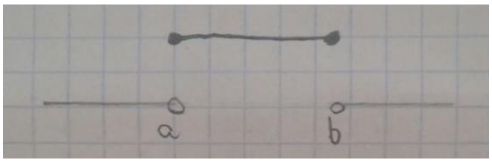
נכתב על ידי נועם יערי

הגדרה

f **פונקציה רציפה בקטע** $[a,b]$ אם :

א. f רציפה בכל נקודה בקטע (a,b).

ב. f רציפה מימין בנקודה a ומשמאל בנקודה b.



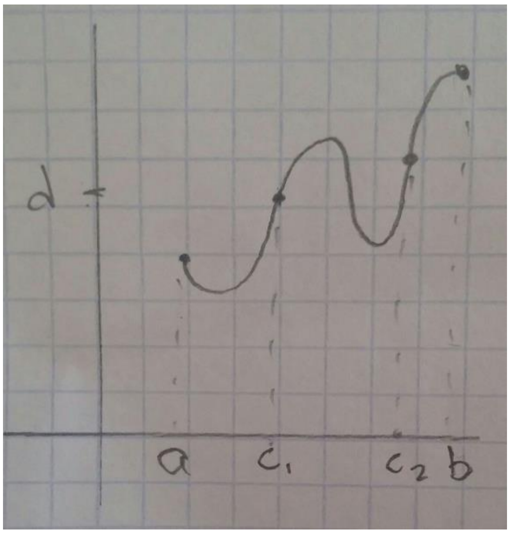
הערה

f רציפה בקטע $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ הפונקציה מצומצמת $f|_{[a,b]}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה בקטע $[a,b]$.

משפט ערך הביניים

אם f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ו - $f(a) < d < f(b)$, אזי קיים $a < c_1 < b$ כך ש -

$f(c_1) = d$.



הוכחה

תהי $A \coloneqq \{x \in [a,b]: f(x) \le d\}$,

$A \ne \phi$, $a \in A$.

A חסומה מלעיל: ע"י b.

ניקח $c \coloneqq \sup A$.

$\boldsymbol{a < c}$:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) < d$ לכן יש $x > a$ כך ש – $f(x) < d$ (למשל: ניקח $a_n \searrow a$.

$f(a_n \to f(a) < d \Leftarrow$ לכן לבסוף $f(a_n < d$) לכן $A \ni x > a \Leftarrow a < x \le \sup A = c$

$\boldsymbol{c < b}$:

אחרת, $c = b$.

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b) > d$

$c = \sup A$ לכן יש $A \ni a_n \to c$ ולכן $f(a_n) \to f(c)_{=f(b)>d}$, ולבסוף $d < f(a_n) \in A$

בסתירה. (הערה: אם $\sup A \coloneqq s$ קיים, יש סדרה $A \ni a_n \to s$. אם $s \in A$ ניקח $a_n = s$ לכל n.

אם $s \notin A$, אפשר למצוא אפילו סדרה עולה ממש $a_n \to s$ (ראינו).)

$\boldsymbol{f(c) = d}$:

נניח ש - $f(c) < d$. ניקח סדרה $[a,b] \ni x_n \searrow c$. ($x_n > c$, סדרה יורדת.)

$f(x_n) \to f(c) < d$, לכן לבסוף $f(x_n) < d \Leftarrow A \ni x_n > c = \sup A$ בסתירה. נניח $d <$

$f(c)$. ניקח סדרה $A \ni x_n \to c$, $f(x_n) \to f(c) > d$ לכן לבסוף $d < f(\underbrace{x_n}_{\in A})$ בסתירה.

■

הערה

משפט ערך הביניים נכון גם כאשר $f(b) < d < f(a)$: נפעיל את המשפט הקודם על הפונקציה $-f$:

$-f(b) < -d < -f(a)$; $-f$ רציפה בקטע $[a,b]$, לכן יש נקודה $b < c < a$ כך ש - $-f(c) =$ $-d$ ולכן $f(c) = d$.

מסקנה

אם f רציפה בקטע $[a.b]$ ומחליפה סימן שם (כלומר, $f(a) < 0 < f(b)$ או $f(a) > 0 > f(b)$) אז f מקבלת את הערך 0 בנקודה כלשהי בקטע.

מסקנה

לכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש (ממשי).

נכתב על ידי נועם יערי

הוכחה

מספיק לבדוק פולינומים מתוקנים. יהי $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, n אי זוגי.

$$f(x)=\underset{\to\infty}{x^n}\Bigg(1+\underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0}+\cdots+\underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0}\Bigg)_{x\to\infty}$$

בפרט, יש b כך ש - $0<f(b)$. בדומה, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=_{n\text{ אי זוגי}}-\infty$

ולכן יש a (ואם רוצים, $b>a$) כך שמתקיים $f(a)<0$.

f רציף ב - $\mathbb{R}$ ובפרט בקטע $[a,b]$. ממשפט ערך הביניים, יש $a<c<b$ כך ש- $f(c)=0$.

למה (ויירשטרס)

פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, חסומה באותו קטע סגור $[a,b]$.

הוכחה

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$. נניח ש $-f$ אינה חסומה מלעיל (המקרה שאינה חסומה מלרע – דומה). לכל n, יש $x_n\in[a,b]$ כך ש - $n<f(x_n)$. $a\le x_n\le b$ סדרה חסומה, לכן יש לה תת סדרה c_n מתכנסת.

$$a\le c_{n\to c}\le b\Leftarrow a\le c\le b$$

$n<f(x_n)$, $\infty\leftarrow n$, לכן $f(x_n)\to\infty$. לכן (c_n ת״ס) $f(c_n)\to\infty\ \underbrace{\Leftarrow}_{c_n\to c,\ c_n,c\in[a,b]}\ f(c)<\infty$

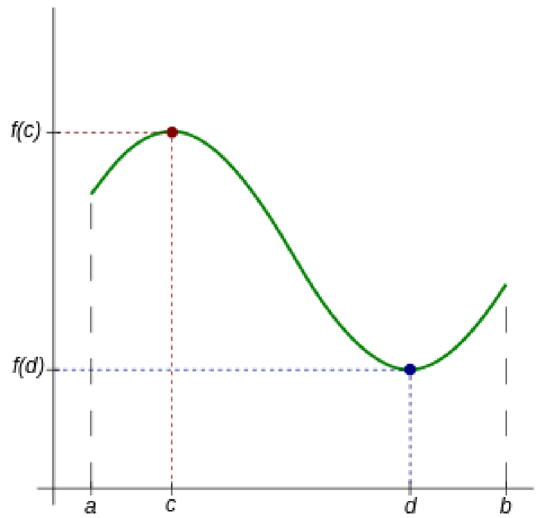
בסתירה. ■

הגדרה

מקסימום של פונקציה f בקטע $[a,b]$ היא נקודה $c\in[a,b]$ כך ש - $f(c)=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$. בדומה, **מינימום של פונקציה f בקטע $[a,b]$** היא נקודה $d\in[a,b]$ כך ש - $f(d)=\min\{f(x):x\in[a,b]\}$.

משפט (ויירשטרס)

פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.



הוכחה

הקבוצה $A := \{f(x): a \le x \le b\} \neq \phi$ וחסומה מהלמה. לכן יש $s := \sup A$.
ניקח סדרה $A \ni f(x_n) \to s$.
$a \le x_n \le b$ חסומה לכן יש ל - x_n תת סדרה מתכנסת $a \le c_{n\to c} \le b \Leftarrow$
$a \le c \le b$.

$f(c) = s$: $f(x_n) \to s$, c_n תת סדרה של x_n, לכן $f(c_n) \to s$ $\overset{\text{רציפות}}{\leftrightarrows}$ $f(c)$. לכן, $s = f(c) \in A$
ולכן $f(c) = \max A$.
קיום מינימום ב – A – דומה.

■

מסקנה

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אזי

$$\{f(x): a \le x \le b\} = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$ קטע סגור.

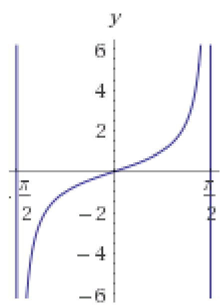
הוכחה

$\boxed{\subseteq}$ מויירשטרס.
$\boxed{\supseteq}$ תהי c_1 נקודה שבה $f(c_1)$ מינימלי, c_2 נקודה שבה $f(c_2)$ מקסימלי.
אם $f(c_1) < f(c_2)$ אז לכל $f(c_1) < d < f(c_2)$, כיוון ש – f רציפה בקטע $[c_1, c_2]$ (או $[c_2, c_1]$) ממע״ב יש x בקטע כך ש - $f(x) = d$. אם $f(c_1) = f(c_2)$ (המינימום = מקסימום) אז הפונקציה קבועה והטענה מידית.

■

הערה

הטענות שהוכחנו אינן נכונות באופן כללי עבור פונקציות רציפות בקטע פתוח.
לדוגמה, $f(x) = \tan x$



רציפה ב - $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, לא חסומה, אין מקסימום, אין מינימום.

עוד דוגמה, $f(x)$ בקטע $(0,1)$. אין מקסימום והמינימום בקטע הפתוח $(0,1)$. למרות שהפונקציה חסומה שם.

נכתב על ידי נועם יערי

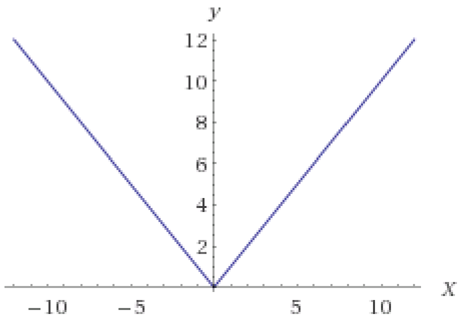
<u>רציפות במידה שווה</u>

הגדרה

***f* רציפה במידה שווה בתחום** $A \subseteq dom\, f$ אם: לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש - $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ לכל $x_1, x_2 \in A$ כך ש - $|x_1 - x_2| < \delta$.

דוגמה

$f(x) = |x|$



(X from −12 to 12)

רציפה במידה שווה ב - $\mathbb{R}$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \big|\,|x_1| - |x_2|\,\big| \le_{\text{אי שוויון המשולש}} |x_1 - x_2| < \delta$$

ניקח $\epsilon \coloneqq \delta$, ואז $|f(x_1) - f(x_2)| \le \delta = \epsilon$ כאשר $|x_1 - x_2| < \delta$.

דוגמה: $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה, אך לא במ"ש, בקטע $(0,1)$.