הרצאה 4

נכתב על ידי יהונתן רגב

משפחות נוספות של משוואות פתירות מסדר ראשון

1. משוואה הומוגנית.
2. משוואת ברנולי.
3. משוואת ריקטי (למצוא פתרון כללי באמצעות פתרון יחיד נתון).
4. משוואת קלרו.

משוואה הומוגנית (מסדר 0)

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

המשוואה פתירה דרך ההצבה :

$$z := \frac{y}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{y'(x) \cdot x - y(x)}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{y'(x) - \frac{y(x)}{x}}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

וקיבלנו משוואה ניתנת להפרדה.

דוגמה

$$x \cdot y' = x + y$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z \coloneqq \frac{y}{x}$$

$$f(z) = 1 + z$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{1}{x}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int z'\, dx = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z = \log|x| + c$$

$$y(x) = x \cdot z(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = x \cdot \log|x| + c \cdot x$$

$$\blacksquare$$

הערה

ניתן לפתור כל משוואה מהצורה:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{A \cdot x + B \cdot y + C}\right)}$$

הוכחה

תחילה, עבור משוואה מהצורה:

$$y' = f(a \cdot x + b \cdot y)$$

נציב:

$$z \coloneqq a \cdot x + b \cdot y$$
$$\Downarrow$$
$$z' = a + b \cdot y'$$
$$\Downarrow$$
$$z' = a + b \cdot f(z)$$

וקיבלנו משוואה ניתנת להפרדה.

כעת, עבור משוואה מהצורה:

$$y' = f\left(\frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{A \cdot x + B \cdot x + C}\right)$$

נציב:

$$\tilde{x} \coloneqq x + \alpha$$

$$\tilde{y} \coloneqq y + \beta$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{y}' = f\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right), \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{y}' = f(u \cdot \tilde{x} + v \cdot \tilde{y}), \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

■

דוגמה

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot x + 4 \cdot y + 8}{x + 2 \cdot y - 3}\right)$$

מתקיים:

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot x + 4 \cdot y + 8}{x + 2 \cdot y - 3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot (x + 2 \cdot y) + 8}{(x + 2 \cdot y) - 3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = g(x + 2 \cdot y)$$

וקיבלנו משוואה הומוגנית.

■

דוגמה

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot x + 3 \cdot y + 4}{x + y + 2}\right)$$

נרצה לקבל:

$$y' = g\left(\frac{u \cdot \tilde{x} + v \cdot \tilde{y}}{U \cdot \tilde{x} + V \cdot \tilde{y}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = g\left(\frac{u + v \cdot \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{U + V \cdot \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = h\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$$

וקיבלנו משוואה הומוגנית.

כלומר, נרצה:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} - \alpha \\ y &= \tilde{y} - \beta \end{aligned}$$

כדי למצוא את α, β נפתור מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} (1): \quad -2\alpha - 3\beta &= -4 \\ (2): \quad -\alpha - \beta &= -2 \end{aligned}$$

אי התלות הלינארית של המקדמים מניבה פתרון יחיד עבור α, β.

כאן:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

$$\blacksquare$$

משוואת ברנולי $(Bernoulli)$

$$\boxed{y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^{k+1}, k \in \mathbb{Z}}$$

נחלק ב - y^{k+1}:

$$\frac{y'}{y^{k+1}} = a(x) \cdot y^{-k} + b(x)$$

נציב:

$$z := y^{-k}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = -k \cdot y^{-k-1} \cdot y'$$

לכן, המשוואה המקורית שקולה למשוואה:

$$-\frac{1}{k} \cdot z' = a(x) \cdot z + b(x)$$

וקיבלנו משוואה לינארית מסדר ראשון.

דוגמה

משוואה המתארת תנועה עם חיכוך ללא כוח נוסף:

$$v'(t) = -b \cdot v(t) + \nu \cdot v^3(t)\,, \qquad b, \nu \in \mathbb{R}$$

משוואת ריקטי ($Riccati$)

$$\boxed{y' = a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)}$$

נתון פתרון אחד למשוואה $y_0(x)$.

$$y_0' = a(x) \cdot y_0^2 + b(x) \cdot y_0 + c(x)$$

$$y' = a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(y_0 - y)' = a(x) \cdot (y_0^2 - y^2) + b(x) \cdot (y_0 - y)$$

$$\Downarrow$$

$$(y_0 - y)' = a(x) \cdot (y_0 + y) \cdot (y_0 - y) + b(x) \cdot (y_0 - y)$$

נציב:

$$y \coloneqq y_0 + \frac{1}{z}$$

הצבה זו נותנת משוואת ברנולי עבור $y_0 - y$ (**תרגיל:** בדוק!).

■

הערה

אם $a(x) = 0$ משוואת ריקטי היא משוואה לינארית.

אם $c(x) = 0$ משוואת ריקטי היא משוואת ברנולי.

■