בוחן בבדידה

29/07/2015 י"ג באב

מתרגלים: מיכאל יושפה, אחיה בר און, עדי בן צבי, יונתן סלמן ותמר נחשוני.

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו כל תשובה בדף של השאלה. על כל דף רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- מבנה הבחינה: 3 שאלות.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

תרגיל 1:

א.(15 נקודות) יהיו A, B אטומים. הוכח כי $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$.
כלומר: הפסוקים $(A \to B)$ ו$(\neg B \to \neg A)$ שקולים טיאוטולוגית.
טבלת אמת

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F
T	T	T	F	F	T

ב.(15 נקודות) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$:
$1 = 1^2$.
כעת, נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח את נכונותה ל$n + 1$:
$1 + 3 + ...2n - 1 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. מש"ל.

תרגיל 2:

נגדיר יחס על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא: $R=\{((m,n),(p,q)) \mid m+q=p+n\}$
א.(15 נקודות) הוכח שזהו יחס שקילות.
ב.(15 נקודות) מצאו את מחלקות השקילות של R ואת קבוצת המנה. מה הקשר בין מחלקות השקילות לבין קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$?
פתרון:
א. צריך להוכיח: רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.
ראשית, נבטא את היחס בצורה יותר נוחה: $(m,n)R(p,q) \Leftrightarrow m-n=p-q$.
רפלקסיביות: יהי $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. ברור ש־ $m-n=m-n$, ולכן: $(m,n)R(m,n)$
סימטריות: יהיו: $(m,n)R(p,q)$. כלומר, מתקיים: $m-n=p-q \Longleftarrow p-q=m-n$, ולכן $(p,q)R(m,n)$.
טרנזיטיביות: יהיו $(m,n),(p.q),(r,s)$ כך ש: $(m,n)R(p,q)$ וגם $(p,q)R(r,s)$. כלומר: $m-n=p-q$ וגם $p-q=r-s \Longleftarrow m-n=r-s \Longleftarrow (m,n)R(r,s)$. מש"ל
ב. נשים לב שכל מחלקת שקילות נקבעת לפי ההפרש שבין האיבר הראשון בזוג לאיבר השני. ההפרש בין שני מספרים טבעיים הוא מספר שלם. כמו כן, כל מספר שלם ניתן להציג כהפרש בין שני מספרים טבעיים. לכן קבוצת המנה "שקולה" ל$\mathbb{Z}$. נתאים כל מחלקת שקילות להפרש שבין האיבר הראשון לאיבר השני של כל זוג שנמצא בה. יהי $x\in\mathbb{Z}$. אם x חיובי, נציג למחלקת השקילות שזה ההפרש שלו הוא $(x+1,1)$. אם x שלילי נבחר נציג למחלקת השקילות שההפרש בה הוא x: $(1,-x+1)$. ואם $x=0$ נבחר נציג: $(1,1)$. מצאנו נציג לכל מחלקת שקילות

תרגיל 3:

א.(15 נקודות). הוכח:
אם $(A\times B=B\times A)$ אז $((A=\emptyset)\vee(B=\emptyset)\vee(A=B))$.
ב.(25 נקודות) נגדיר את סדרת הקבוצות הבאה:
נסמן $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ ונגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$ את הקבוצה $A_n=\{n,2n,3n,...\}$. מצאו באופן מפורש את הקבוצות

- $A_4\cap A_6$
- $\bigcup\limits_{n\in I}A_n$ כאשר $I=\{2,3,5,7,11,13\ldots\}$ קבוצת כל המספרים הראשוניים.
- $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\geq i}A_n$

פתרון:
א.<u>בשלילה</u>, נניח כי $A\neq\phi$, $B\neq\phi$, $A\neq B$, אבל $A\times B=B\times A$. בה"כ נניח כי קיים $a\in A\setminus B$, ויהי $b\in B$. אז מתקיים $(a,b)\in A\times B$ אבל $(a,b)\notin B\times A$, בסתירה להנחה.
ב.

- $A_4\cap A_6=A_{12}$. הסבר: $a\in A_4\cap A_6 \iff a$ מתחלק גם ב4 וגם ב6 $\iff a$ מתחלק ב12 (מכיוון ש12 הוא המחלק המשותף המינימלי של 4 ו6) $\iff a\in A_{12}$.
- $\bigcup\limits_{n\in I}A_n=\mathbb{N}\setminus\{1\}$. הסבר: $\forall n\in I\ A_n\subseteq\mathbb{N}\setminus\{1\}$ ולכן $\bigcup\limits_{n\in I}A_n\subseteq\mathbb{N}\setminus\{1\}$. מצד שני, יהי $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, ידוע שכל מס' מתפרק לגורמים ראשוניים ובפרט לכל מס' יש מחלק ראשוני. לכן קיים p ראשוני כך ש $p\mid m$, כלומר, קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $pk=m$. $\Longleftarrow m\in A_p \Longleftarrow m\in\bigcup_{n\in I}A_n$.
- ראשית נחשב את $\bigcup_{n\geq i}A_n$. טענה: $\bigcup_{n\geq i}A_n=\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq i\}$. הוכחה: $\forall n\geq i\ A_n\subseteq\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq i\}$ ולכן $\bigcup_{n\geq i}A_n\subseteq\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq i\}$. מצד שני, לכל $m\geq i$, $m\in A_m$ ולכן $m\in\bigcup_{n\geq i}A_n$.

כעת, $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq i}A_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq i\}=\emptyset$ כי לכל $x\in\mathbb{N}$, $x\notin\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq x+1\}$ ולכן $x\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq i\}$. מש"ל.