תרגול 14

18 אוגוסט, 2016

<u>תרגיל:</u>

חשב את האינטגרל <u>בשיטת הטרפז</u> עבור $h = \pi\ , h = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\pi} \underbrace{e^x \cos(x)}_{f(x)} dx$$

<u>פתרון:</u>

א) <u>עבור $h = \pi$:</u>

$$h = \frac{b-a}{m}$$

כאשר m מספר הקטעים ולכן –

$$h = \frac{\pi - 0}{m} = \pi$$

לכן $m = 1$ ולכן נשתמש בכלל טרפז **פשוט**!

באופן כללי -

$$I \approx \left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right] * h$$

ולכן –

$$I \approx \left[\frac{f(0) + f(\pi)}{2}\right] * \pi = -34.779$$

■

ב) <u>עבור $h = \frac{\pi}{2}$:</u>

$$h = \frac{b-a}{m}$$

ולכן –

$$\frac{\pi}{2} = h = \frac{\pi - 0}{m}$$

נקבל ש- $m = 2$ ולכן נשתמש בכלל הטרפז **המוכלל**!

מאחר ו - $h = \frac{\pi}{2}$ נסמן את ה-x-ים –

$$x_i = x_0 + ih\ , 0 \le i \le 2 => x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}\ , x_2 = \pi$$

נקבל ש –

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi)\right] = \frac{\pi}{4}\left[f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi)\right] = -17.389.$$

■

<u>תזכורת:</u>

כלל הטרפז המורחב –

$$\underbrace{I \overset{\text{מוכלל}}{\tilde{c}}}_{\text{קירוב}} = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b)\right]$$

כאשר השגיאה במקרה זה –

$$\underbrace{E^c}_{\text{שגיאה}} \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} * \left|f^{(2)}(c)\right|$$

כאשר $f^{(2)}(x)$ מקבלת מקסימום ב - $c \in [a,b]$.

<u>תרגיל:</u>

חשב את $\int_0^1 \frac{x^2}{\sin(x)}dx$ בשיטת סימפסון (נשים לב שאין סינגולריות ב – 0 מאחר ו –

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} x * \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\text{שואף ל}-1} = 0\right.$$

עבור כלל סימפסון –

$$h = \frac{b-a}{2m}$$

m מספר פעמים שאני מפעיל את כלל סימפסון.

נחשב את האינטגרל בשיטת סימפסון:

א) $m = 1$.

ב) $m = 2$.

פתרון:

א) $m = 1$ גורר שנשתמש בסימפסון פשוט!

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

נקודות שריג:

$$x_i = \underbrace{x_0}_{\text{נקודת התחלה}} + ih\,, 0 \le i \le m$$

$$x_0 = 0\,, x_1 = \frac{1}{2}\,, x_2 = 1$$

ולכן –

$$\underbrace{I}_{\text{קירוב}} = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] =_{h=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right] = 0.5457$$

■

ב) $m = 2$ –

$$h = \frac{1-0}{2*2} = \frac{1}{4}$$

$m = 2$ ולכן נפעיל את כלל סימפסון הפשוט פעמיים.

<u>נקודות החלוקה(שריג):</u>

$$x_i = x_0 + ih\,, 0 \le i \le 4$$

$$=> x_0 = 0\,, x_1 = \frac{1}{4}\,, x_2 = \frac{1}{2}\,, x_3 = \frac{3}{4}\,, x_4 = 1$$

ולכן –

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right] =_{h=\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right] = \frac{1}{12}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$
$$= 0.545222$$

■

תרגול 14

18 אוגוסט, 2016

תרגיל:

x	$x_0 = \frac{1}{4}$	$x_1 = \frac{1}{2}$	$x_2 = \frac{3}{4}$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1.25$
$f(x)$	0.5	0.707	0.866	1	1.118

חשבו את $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} f(x)dx$ עפ"י שיטת סימפסון.

פתרון:

$$h = \frac{1}{4}$$

ולכן -

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1.25 - \frac{1}{4}}{2m} = \frac{1}{4} => m = 2$$

לכן נפעיל כלל סימפסון **הרגיל** פעמיים.

ולכן –

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + 4f(1) + f(1.25)\right] = 0.848107.$$

■

תרגול 14

18 אוגוסט, 2016

תרבוע גאוס:

שיטת גאוס לז'נדר עבור אינט' מהצורה –

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mu(x)dx$$

$\mu(x) = 1$ במקרה של לז'נדר (פונקציית משקל).

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{w_i}_{\text{משקלים}} \underbrace{f(x_i)}_{\text{צמתים } x_i} + E_n$$

x_i – צמתים=שורשים של פולינום אורתוגונלי. בפרט, בלז'נדר x_i שורשים של פולינום לז'נדר מדרגה n.

w_i = משקלים.

n = מספר הנקודות שנלקחו.

במקרה של לז'נדר -

$$\underbrace{E_n}_{\text{שגיאה}} \leq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left((2n)!\right)^3} * f^{(2n)}(c)$$

כאשר $c \in [-1,1]$.

<u>דוגמה:</u>

חשבו את האינטגרל –

$$\int_{0}^{1} \sqrt{e^{1.5x} - 1}dx$$

בשיטת <u>לז'נדר</u> עם <u>3 נקודות</u>.

<u>פתרון:</u>

נעביר את הקטע - $[0,1]$ לקטע $[-1,1]$:

$$t = \frac{2}{b-a}(x-b) + 1$$

$$=> \ t = \frac{2}{1-0}(x-1) + 1 = 2x - 1 => \boxed{x = \frac{t+1}{2}}$$

ולכן –

$$\int_0^1 \sqrt{e^{1.5x}-1}\,dx \underset{\substack{x=\frac{t+1}{2}\\ dx=\frac{1}{2}dt}}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{\sqrt{e^{1.5*\frac{t+1}{2}}-1}}_{g(t)}\,dt$$

פו' משקל = 1.

באמצעות 3 נקודות –

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{e^{1.5*\frac{t+1}{2}}-1dt} \approx \underbrace{w_1 g(t_1)+w_2 g(t_2)+w_3 g(t_3)}_{\text{סכימה}}$$

את הצמתים, כלומר - t_1, t_2, t_3 הם שורשי פולינום לז'נדר מדרגה 3:

$$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$$

ולכן –

$$t_1=\sqrt{\frac{5}{3}}\,, t_2=0\,, t_3=-\sqrt{\frac{5}{3}}$$

<u>כדי למצוא את w_i נעזר במשפט:</u>

הסכימה של תרבוע גאוס מדויקת על כל פולינום שקטן או שווה לדרגת הפ"א (הפולינום האורתוגונלי).

$n=3$ ולכן הסכימה **מדויקת** לכל פולינומים קטנים שווים ל-3.

נזכור בהרצאה שראינו כי –

$$\int_{-1}^{1}x^k dx=\sum w_i g(t_i)$$

ולכן -

$$2=\int_{-1}^{1}1\,dt=w_1*1+w_2*1+w_3*1$$

$$0=\int_{-1}^{1}tdt=w_1*\sqrt{\frac{5}{3}}+0*w_2-\sqrt{\frac{5}{3}}*w_3$$

$$\frac{2}{3}=\int_{-1}^{1}t^2dt=w_1*\frac{5}{3}+0*w_2+\frac{5}{3}*w_3$$

תרגול 14

משלוש משוואות אלו נוכל לקבל ש –

$$w_1 = \frac{5}{9}\ , w_2 = \frac{8}{9}\ , w_3 = \frac{5}{9}$$

וכעת –

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{e^{1.5*\frac{t+1}{2}}-1}dt \approx \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

נחזור למשתנה המקורי –

$$\int_{0}^{1}\underbrace{\sqrt{e^{1.5x}-1}}_{f(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f\left(\frac{t+1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{e^{1.5*\left(\frac{t+1}{2}\right)}-1}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}+1}{2}\right)+\frac{8}{9}f\left(\frac{0+1}{2}\right)+\frac{5}{9}f\left(\frac{-\sqrt{\frac{5}{3}}+1}{2}\right)\right]$$

■

<u>שיטת גאוס צ'ביצ'ב</u>

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2\pi}\right), i = 1, \dots, n$$

$$\boxed{w_i = \frac{\pi}{n}}$$

השגיאה:

$$E_n \le \frac{\pi}{(2n)! * 2^{2n-1}} * f^{(2n)}(c)$$

כאשר $c \in [-1,1]$.

בשיטה זו - $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ פונקציית משקל.

תרגול 14

18 אוגוסט, 2016

<u>תרגיל:</u>

חשב את האינטגרל –

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ע"י שיטת גאוס צ'ביצ'ב עבור דרגת דיוק אלגברית של 5.

($N=2n-1$ דרגת דיוק אלגברית , n דרגת קירוב = דרגת הפ"א).

<u>פתרון:</u>

ידוע ש- $N=5$ ולכן - $2n-1=5$ ולכן $n=3$.

לכן נצטרך 3 נקודות –

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{3}f(x_1)+\frac{\pi}{3}f(x_2)+\frac{\pi}{3}f(x_3)\ \ ,\left(w_i=\frac{\pi}{3}\right)$$

ידוע ש- $n=3$ ולכן הנקודות הינם –

$$x_i=\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right),i=1,2,3$$

ולכן –

$$x_1=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right),x_2=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right),x_3=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

כל מה שנותר זה להציב ולחשב.

■