תרגיל 8 מבוא לתורת החבורות

שאלה 8.1 תהי G חבורה. תהי $H \le G$ תת חבורה ו $N_1, N_2 \lhd G$ תתי חבורות נורמליות. בנוסף נניח כי

$$N_1 \cap H = N_2 \cap H$$

הוכיחו כי

$$HN_1/N_1 \simeq HN_2/N_2$$

פתרון: פשוט. לפי משפט האיזומורפיזם השני

$$HN_1/N_1 \simeq H/N_1 \cap H = H/N_2 \cap H \simeq HN_2/N_2$$

שאלה 8.2 תהי G חבורה ו $H \lhd G$ תת חבורה נורמלית מאינדקס p ראשוני. כלומר $[G:H] = p$. יהי $K \le G$ תת חבורה נוספת כך ש $H \nsubseteq K$. הוכיחו כי $KH = G$ ו $[K : K \cap H] = p$.

פתרון: קודם כל, לפי הנתון $|G/H| = p$ ולכן

$$G/H \simeq \mathbb{Z}_p$$

ולכן אין תת חבורות לא טריויאליות בתוך G/H. לכן לפי משפט ההתאמה אין תת חבורות לא טריויאליות בין H ל G. עכשיו HK היא תת חבורה של G (כי H נורמלית) וכמובן ש

$$H \subseteq HK \subseteq G$$

לא ייתכן ש $HK = H$ כי הנחנו ש $H \nsubseteq K$ ולכן בהכרח $HK = G$. לפי משפט האיזומורפיזם השני

$$G/H = HK/H \simeq K/K \cap H$$

בפרט

$$p = [G : H] = |G/H| = |K/K \cap H| = [K : K \cap H]$$

כנדרש.

שאלה 8.3 תהי G חבורה ו $H, K \le G$ שתי תתי חבורות. הוכיחו כי:

1. HK היא תת חבורה אם ורק אם $HK = KH$.
   רמז: עבור אחד הכיוונים מומלץ להשתמש בעובדה הבאה. לכל תת קבוצה $A \subseteq G$ אפשר לסמן את קבוצת ההופכיים

   $$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

   אם H תת חבורה אז בפרט $H^{-1} = H$
   [הערה: מהטענה הזאת אפשר להסיק בקלות מה שהוכחתם בהרצאה, שאם K

נורמלית אז HK תת חבורה]
פתרון: נניח ש HK תת חבורה. היות ש $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$ אז קל לבדוק ש

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$$

אבל היות ש HK, K, H כולן תתי חבורות, מתקיים ש

$$HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$$

וזה מוכיח כיוון אחד.

בכיוון השני נניח $HK = KH$. אם $hk \in HK$ אז

$$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$$

ולכן HK סגור להופכי. כמו כן, אם

$$h_1k_1, h_2k_2 \in HK$$

אז נשים לב ש $k_1h_2 \in KH = HK$ ולכן

$$k_1h_2 = h_3k_3$$

ולכן

$$h_1k_1h_2k_2 = h_1h_3k_3k_2 \in HK$$

ולכן HK גם סגורה לחיבור. בסך הכל HK תת חבורה כנדרש.

2. אם H ו K תתי חבורות נורמליות אז HK גם כן תת חבורה נורמלית.
פתרון: כבר ראינו ש HK תת חבורה. כדי להוכיח שהיא נורמלית ניקח $g \in G$ ואז

$$gHK = HgK = HKg$$

כנדרש.