תרגיל תיאורטי מספר 1

1. הוכיחו שלכל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

(א) $|Re(z)| \leq |z|$.

פתרון: נסמן $z = a + bi$ אזי

$$|Re(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

(ב) $z = \bar{z}$ אמ"מ $z \in \mathbb{R}$.

פתרון: נסמן $z = a + bi$ אזי

$$[z \in \mathbb{R}] \iff [b = 0] \iff [z = \bar{z}]$$

(ג) לכל n טבעי מתקיים כי $|z^n| = |z|^n$

פתרון: כיוון שלכל 2 מספרים מרוכבים z_1, z_2 מתקיים $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ נקבל כי

$$|z^n| = \left|z \cdot z^{n-1}\right| = |z| \cdot \left|z^{n-1}\right| = |z| \cdot \left|z \cdot z^{n-2}\right| = |z| \cdot |z| \cdot \left|z^{n-2}\right| = \cdots = |z| \cdot |z| \cdots |z| = |z|^n$$

2. חשבו את את הבאים:

(א) $\left|(1+i)^{20}\right|$

פתרון: מתקיים כי

$$\left|(1+i)^{20}\right| = |1+i|^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} = 2^{10} = 1024$$

(ב) $(4+3i)^{-1}$

פתרון: מתקיים כי

$$(4+3i)^{-1} = \frac{1}{(4+3i)} = \frac{1}{(4+3i)} \frac{(4-3i)}{(4-3i)} = \frac{(4-3i)}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים כי $m < n$ אז למערכת $Ax = 0$ יש ∞ פתרונות.
פתרון: נכון. למערכת $Ax = 0$ תמיד יש פתרון $x = 0$ ולכן לא יכולה להיווצר שורת סתירה. כיוון שיש m משוואות יש לכל היותר m איברים מובילים בצורה המדורגת ולכן לכל היותר m משתנים תלויים. כיוון ש $m < n$ נקבל שבהכרח יש משתנים חופשיים מה שגורר (ביחד עם זה שאין שורת סתירה) שיש ∞ פתרונות.

(ב) אם עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים כי $m > n$ אז למערכת $Ax = 0$ אין פתרון.
פתרון: לא נכון. עבור $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ למערכת $Ax = 0$ יש ∞ פתרונות.

(ג) אם עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים כי למערכת $(A^tA)\,x = 0$ יש פתרון יחיד אזי גם למערכת $(AA^t)\,x = 0$ יש פתרון יחיד.
פתרון: לא נכון. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ המערכת $A^tAx = 0$ היא המערכת $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array}\right)$שיש לה פתרון יחיד אך המערכת $AA^tx = 0$ היא המערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שיש לה ∞ פתרונות.

(ד) קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ עבורה יש פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואין פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
פתרון: נכון. למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ה) קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ עבורה יש פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואין פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
פתרון: לא נכון. אם יש פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, נסמנו v אזי

$$A\,(2v) = 2Av = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $2v$ הוא פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. חשבו את $A \cdot B$ במקרים הבאים. אם הכפל לא מוגדר, ציינו זאת.

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
פתרון: מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(ב) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
פתרון: לא מוגדר.

(ג) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
פתרון: מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

(ד) $A=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\end{pmatrix}$

פתרון: מתקיים

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\9 & -3 & -3\\12 & -4 & -4\end{pmatrix}$$

5. עבור $\alpha\in\mathbb{F},\ A\in\mathbb{F}^{m\times n},\ B\in\mathbb{F}^{n\times p}$ הוכיחו שמתקיים $\alpha\left(AB\right)=A\left(\alpha B\right)$

פתרון: שתי המטריצות מגודל $m\times p$ ולכל i,j מתקיים

$$\left[\alpha\left(AB\right)\right]_{i,j}=\alpha\left(AB\right)_{i,j}=\alpha\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}B_{k,j}=$$
$$\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}\alpha B_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}\left(\alpha B\right)_{k,j}=\left[A\left(\alpha B\right)\right]_{i,j}$$

6. נגדיר מטריצה $A\in\mathbb{R}^{8\times8}$ ע"י $A_{i,j}=i+j$. חשבו את הבאים:

(א) $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

פתרון: נחשב

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=C_3(A)=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\end{pmatrix}$$

(ב) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

פתרון: נשים לב שבמקום i של $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ שווה לסכום השורה ה iית של A (כלומר $\sum_{k=1}^{8}A_{i,k}$). למשל המיקום 1 שווה ל 44 $=\sum_{k=1}^{8}A_{1,k}=\sum_{k=1}^{8}\left(1+k\right)=\left(2+9\right)\frac{8}{2}=44$ ולכן

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44\\44+8\\44+16\\44+24\\44+32\\44+40\\44+48\\44+56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44\\52\\60\\68\\76\\84\\92\\100\end{pmatrix}$$

כאשר סכום שורה i של A שווה לסכום שורה $i-1$ של A ועוד 8 .

7. תהיינה $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ו $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ חשבו את

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^2 \left(\begin{array}{c|c} v & u \\ \hline 0 & w \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

היעזרו בעובדה כי $Av = 3v, Au = 2u$.

פתרון: נשים לב

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^2 \left(\begin{array}{c|c} v & u \\ \hline 0 & w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 0 \\ \hline 0 & B^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} v & u \\ \hline 0 & w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^2 v & A^2 u \\ \hline B^2 0 & B^2 w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A(3v) & A(2u) \\ \hline 0 & B^2 w \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 3Av & 2Au \\ \hline 0 & B^2 w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 3 \cdot 3v & 2 \cdot 2u \\ \hline 0 & B^2 w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 9v & 4u \\ \hline 0 & B^2 w \end{array}\right)$$

בנוסף, $B^2 w = C_3(B^2) = B \cdot C_3(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$ ולכן התשובה הסופית היא

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 & 0 \\ -18 & 0 \\ 0 & -6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$