תרגיל 10

1. הוכיחו כי לכל $0 < y < x$ ו $\alpha > 1$ מתקיים

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^{\alpha} - y^{\alpha} < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

פתרון:

נתבונן בפונקציה $f(x) = x^{\alpha}$. הפונקציה רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x)לכל $0 < y < x$.

לכן, לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' נקבל כי קיימת נקודה $c \in (y,x)$ כך ש

$$\frac{x^{\alpha}-y^{\alpha}}{x-y} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \alpha c^{\alpha-1}$$

כיוון ש $0 < y < c < x$ ו $\alpha > 1$, נקבל כי

$$\alpha y^{\alpha-1} < \alpha c^{\alpha-1} < \alpha x^{\alpha-1} \implies \alpha y^{\alpha-1} < \frac{x^{\alpha}-y^{\alpha}}{x-y} < \alpha x^{\alpha-1}$$

נכפיל את אי השיוויונים ב $x-y>0$ ונקבל כי

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^{\alpha} - y^{\alpha} < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

כדרוש.

2. יהי $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ פולינום מדרגה $n > 0$ (כלומר $a_n \neq 0$) חשבו את הגבולות

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

כאשר:

(א) $a_n > 0$, n טבעי אי־זוגי.

(ב) $a_n < 0$, n טבעי זוגי.

(ג) $a_n < 0$, n טבעי אי־זוגי.

פתרון:

יהי H מספר אינסופי. $f(H) = H^n\left(a_n + a_{n-1}\cdot\frac{1}{H} + \cdots + \frac{a_0}{H^n}\right)$

(א)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

הסבר:

עבור H אינסופי חיובי H^n אינסופי חיובי, וכיוון ש $a_n>0$ $\left(a_n+a_{n-1}\cdot\frac{1}{H}+\cdots+\frac{a_0}{H^n}\right)$ הוא מספר משמעותי חיובי. ולכן מכפלתם היא מספר איסופי חיובי.

עבור H מספר אינסופי שלילי, כיוון ש n אי־זוגי H^n מספר איסופי שלילי. $a_n>0$ ולכן $\left(a_n+a_{n-1}\cdot\frac{1}{H}+\cdots+\frac{a_0}{H^n}\right)$ הוא מספר משמעותי חיובי, ומכפלתם מספר איסופי שלילי.

(ב)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

הסבר:

עבור H אינסופי חיובי H^n אינסופי חיובי, וכיוון ש $a_n<0$ $\left(a_n+a_{n-1}\cdot\frac{1}{H}+\cdots+\frac{a_0}{H^n}\right)$ הוא מספר משמעותי שלילי. ולכן מכפלתם היא מספר איסופי שלילי.

עבור H מספר אינסופי שלילי, כיוון ש n זוגי H^n מספר איסופי חיובי. $a_n<0$ ולכן $\left(a_n+a_{n-1}\cdot\frac{1}{H}+\cdots+\frac{a_0}{H^n}\right)$ הוא מספר משמעותי שלילי, ומכפלתם מספר איסופי שלילי.

(ג)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

הסבר:

עבור H אינסופי חיובי H^n אינסופי חיובי, וכיוון ש $a_n<0$ $\left(a_n+a_{n-1}\cdot\frac{1}{H}+\cdots+\frac{a_0}{H^n}\right)$ הוא מספר משמעותי שלילי. ולכן מכפלתם היא מספר איסופי שלילי.

עבור H מספר אינסופי שלילי, כיוון ש n אי־זוגי H^n מספר איסופי שלילי. $a_n<0$ ולכן $\left(a_n+a_{n-1}\cdot\frac{1}{H}+\cdots+\frac{a_0}{H^n}\right)$ הוא מספר משמעותי שלילי, ומכפלתם מספר איסופי חיובי.

3. חשבו את הגבולות הבאים (גבול סופי ואינסופי) במידה והגבול לא קיים הסבירו מדוע.

(א) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

(ב) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

(ג) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-x}}$

(ד) $\lim_{x\to\infty}e^{2x}\sin x$

(ה) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(ו) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)$

(ז) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(ח) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-x-1}$

פתרון:

(א) יהי $0 < \epsilon \approx 0$ אינפי חיובי, אזי $f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt[5]{\epsilon}}$ מספר איסופי חיובי ולכן $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \infty$

(ב) יהי $0 > \epsilon \approx 0$ אינפי שלילי, אזי $f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt[5]{\epsilon}}$ מספר איסופי שלילי ולכן $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = -\infty$

(ג) זהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$, נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to-\infty} -2\sqrt{1-x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

הסבר: עבור H אינסופי שלילי $\sqrt{1-H}$ אינסופי חיובי ולכן $-2\sqrt{1-H}\left(1-\frac{1}{H^2}\right)$ אינסופי שלילי.

(ד) הגבול לא קיים. נראה זאת ע"י בחירת מספרים אינסופיים שונים:

עבור $H = 2\pi N + \frac{\pi}{2}$ כאשר N מספר היפר שלם אינסופי חיובי נקבל:

$$f(H) = e^{2\left(2\pi N+\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(2\pi N + \frac{\pi}{2}\right) = e^{2\left(2\pi N+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 1$$

מספר אינסופי שלילי.

עבור $H = 2\pi N - \frac{\pi}{2}$ נקבל:

$$f(H) = e^{2\left(2\pi N-\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(2\pi N - \frac{\pi}{2}\right) = e^{2\left(2\pi N+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot (-1)$$

מספר איסופי שלילי.

כיוון שהגבול תלוי בבחירת H נקבל כי הגבול לא קיים.

(ה) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$. נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-1} = \frac{(-3)(-1)}{(-1)} = -3$$

(ו) יהי $\epsilon \approx 0$.

$$\left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{1}{\epsilon^3}\right) = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon^4}\right)$$

מספר אינסופי חיובי, ולכן $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) = \infty$.

(ז) יהי H מספר אינסופי חיובי.

$$f(H) = \frac{1}{\sqrt{H-1}} \approx 0$$

ולכן $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$.

(ח) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$$

קיבלנו שוב גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = 2$$

ולכן גם $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-x-1} = 2$.

4. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ו־ $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ אז $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$

(ב) אם $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ אז $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

פתרון:

(א) הוכחה:

יהי $c \neq a \approx c$. מהגדרת הגבול נובע כי $f(a) \approx 0$, ומהנתון ש $f(x) > 0$ נקבל $0 < f(a) \approx 0$, לכן, $\frac{1}{f(a)}$ מספר אינסופי חיובי כלומר $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(ב) הפרכה ע"י דוגמה נגדית:

ניקח למשל $f(x) = x$. מתקיים כי $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$, אך $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ לא קיים, כיוון שעבור $0 < \epsilon \approx 0$ $\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר איסופי חיובי, ועבור $0 > \epsilon \approx 0$ $\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר איסופי שלילי.