

פתרון תרגיל 3 אנליזה הרמונית תשע"ט

5 בנובמבר 2018

1. נפתח לפי תכונות המכפלה הפנימית:

$$\langle v - \pi_U(v), \tilde{v}_j \rangle = \left\langle v - \sum_{k=1}^n \langle v, \tilde{v}_k \rangle \tilde{v}_k, \tilde{v}_j \right\rangle = \langle v, \tilde{v}_j \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^n \langle v, \tilde{v}_k \rangle \tilde{v}_k, \tilde{v}_j \right\rangle$$

גם הסכום יוצא החוצה, וגם הסקלרים $\langle v, \tilde{v}_k \rangle$; נקבל:

$$= \langle v, \tilde{v}_j \rangle - \sum_{k=1}^n \langle v, \tilde{v}_k \rangle \langle \tilde{v}_k, \tilde{v}_j \rangle$$

מכיוון שהוקטורים $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ אורתונורמליים, כל האיברים בסכום מתאפסים חוץ מהאיבר $\langle \tilde{v}_j, \tilde{v}_j \rangle$, שווה ל-1; הוא מתקבל כאשר $k = j$. נקבל:

$$= \langle v, \tilde{v}_j \rangle - \langle v, \tilde{v}_j \rangle \cdot 1 = 0$$

כנדרש.

2. נפעיל גרס-שמידט על הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$. נסמן את הבסיס שלנו $\{v_1, v_2, v_3\}$ ואת הבסיס החדש $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\|1\|}$$

נחשב את הנורמה של $p(x) = 1$:

$$\|1\|^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

לא משנה מה מציבים, מקבלים 1...לכן: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} = \frac{x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}}{\left\| x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \right\|} = \frac{x - \langle x, 1 \rangle \frac{1}{3}}{\|x - \langle x, 1 \rangle \frac{1}{3}\|}$$

שלפנו את הסקלר $\frac{1}{\sqrt{3}}$ לפי תכונת הליניאריות. נחשב את מכפלת הפולינומים $p(x) = x, q(x) = 1$

$$\langle x, 1 \rangle = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

כלומר, $x, 1$ הם כבר אורתוגונליים; אם כן:

$$u_2 = \frac{x}{\|x\|}$$

נחשב את הנורמה של $p(x) = x$

$$\|x\|^2 = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

לכן: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x$

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2\|} = \frac{x^2 - \langle x^2, 1 \rangle \frac{1}{3} - \langle x^2, x \rangle \frac{x}{2}}{\|x^2 - \langle x^2, 1 \rangle \frac{1}{3} - \langle x^2, x \rangle \frac{x}{2}\|}$$

כאן כבר שלפתי ישר את הסקלרים. נחשב את המכפלות:

$$\langle x^2, 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$\langle x^2, x \rangle = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$$

ולכן:

$$u_3 = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\|x^2 - \frac{2}{3}\|}$$

נחשב את הנורמה של $p(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

$$\left\|x^2 - \frac{2}{3}\right\|^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

לכן: $u_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3}\right)$

3. ובכן:

$$\langle \pi_U(v), w \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle v, \tilde{v}_k \rangle \tilde{v}_k, w \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle v, \tilde{v}_k \rangle \langle \tilde{v}_k, w \rangle$$

לפי תכונת הליניאריות; כעת, נכניס את הסקלר $\langle \tilde{v}_k, w \rangle$ לרכיב השני ב- $\langle v, \tilde{v}_k \rangle$, ולפי תכונת ההרמיטיות:

$$\sum_{k=1}^n \langle v, \overline{\langle \tilde{v}_k, w \rangle} \tilde{v}_k \rangle = \left\langle v, \sum_{k=1}^n \langle w, \tilde{v}_k \rangle \tilde{v}_k \right\rangle = \langle v, \pi_U(w) \rangle$$

כנדרש.

4. באמצעות גרס־שמידט על הבסיס $\{1, x, x^2\}$, אנחנו מקבלים את הבסיס האורתונורמלי של U :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$$

הקירוב הטוב ביותר הוא ההיטל האורתוגונלי, כלומר:

$$\pi_U(e^x) = \left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle e^x, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x + \left\langle e^x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

אם נסדר:

$$\pi_U(e^x) = \langle e^x, 1 \rangle \frac{1}{2} + \langle e^x, x \rangle \frac{3}{2}x + \left\langle e^x, \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle \frac{45}{8} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

נחשב את המכפלות הפנימיות; תיאורטית צריך בשתי האחרונות אינטגרציה בחלקים, בפועל אפשר להסתפק בוולפרס אלפא:

$$\langle e^x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e}$$

$$\langle e^x, x \rangle = \int_{-1}^1 x e^x dx = \frac{2}{e}$$

$$\left\langle e^x, \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle = \int_{-1}^1 e^x \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2(e^2 - 7)}{3e}$$

נציב ונקבל את הדרוש.