פתרונות לשאלות חלק ב, מועד ב, תשע"ו / אנליזה מודרנית (341).
(פרופ. שמואל קנטורוביץ).

1. לפי נתוני השאלה, הנחות של משפט לר"נ (לבג-רדון-ניקודים) מתקיימות,
(א-ב) לכל $n\in\mathbb{N}$, ואף נתון ש $\nu_n << \mu$. לכן קיימות $0\le h_n\in L^1(\mu)$
כך ש
(1) $(\forall E\in\mathcal{A})$ $\nu_n(E)=\int_E h_n\,d\mu$ (מסמנים $h_n \doteq \frac{d\nu_n}{d\mu}$).

נתון גם ש $(0\le)\, h_n\le g\in L^1(\mu)$ לכל n ! $h_n\to h$
(כב"מ-μ). לכן $0\le h\le g$ כב"מ-(μ), ולכל $E\in\mathcal{A}$,
$h_n I_E\to h I_E$ כב"מ-μ ! $0\le h_n I_E\le g\in L^1(\mu)$.
לפי משפט ההתכנסות הנשלטת $h I_E\in L^1(\mu)$ (לכל $E\in\mathcal{A}$,
ובמיוחד, עבור $E=X$, כך ש $h\in L^1(\mu)$!)

$$\nu(E)\doteq\int_E h\,d\mu\doteq\int h I_E\,d\mu=\lim_n\int h_n I_E\,d\mu$$

$$=\lim_n\int_E h_n\,d\mu=\lim_n \nu_n(E) \quad \text{(לפי (1))}.$$

כיון ש $0\le h\in L^1(\mu)$, $\nu:\mathcal{A}\to[0,\infty)$ המוגדרת ע"י היא מידה
חיובית סופית ו $\nu<<\mu$. ע"כ — הוכחנו את חלקים א-ב.

ג. תהי $f\in L^\infty(\mu)\cap L^1(\mu)$. נסמן $K=\|f\|_{L^\infty(\mu)}$. אז $|f|$
מדידה, אי-שלילית, ו $|f|\le K$ כב"מ-μ. על כן האינטגרל
$\int|f|\,d\nu_n$ מוגדר לכל n, ולפי משפט

$$\int|f|\,d\nu_n=\int|f|h_n\,d\mu\le K\int h_n\,d\mu\le K\int g\,d\mu=K\|g\|_{L^1(\mu)}<\infty$$

כלומר: f מדידה ו $\|f\|_{L^1(\nu_n)}<\infty$ לכל n, אז $f\in\bigcap_{n=1}^\infty L^1(\nu_n)$.

באותו אופן

$$\int |f|\,d\nu = \int |f|\,h\,d\mu \le K\|g\|_{L^1(\mu)} < \infty$$

ולכן $f\in L^1(\nu)$. בסה"כ, $f\in L^1(\nu)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}L^1(\nu_n)$.

הסדרה $\{fh_n\}$ מקיימת את תנאי משפט ההתכנסות הנשלטת:

fh_n מדידות, $fh_n\to fh$ כב"מ-μ, ו- $|fh_n|\le Kg\in L^1(\mu)$ כב"מ-μ (!!)

לכן

$$\int fh_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int fh\,d\mu$$

כ"א (לפי משפט!)

$$\int f\,d\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\,d\nu \,.$$

---

2. יש להעיר שמתכוונים לתת-מרחב (ליניארי) סגור M של H השונה מ-H (אחרת, אם $M=H$, הרי $M^\perp=\{0\}$, ולכן

$\{(x,z)\mid z\in M^\perp,\ \|z\|=1\}$ ריקה,

וה-sup שלה לא מוגדר!). יהי $x\in H$ כל שהוא, נתון.

<u>מקרה טריויאלי</u>: $x\in M$. במקרה זה, $(x,z)=0$ לכל $z\in M^\perp$, ולכן $\sup\{(x,z)\mid z\in M^\perp,\ \|z\|=1\}=0$.

מאידך $d \doteq \inf_{y\in M}\|x-y\| = \|x-x\|=0$ ($y=x\in M$). לכן הנוסחה

$$d=\sup\{(x,z)\mid z\in M^\perp,\ \|z\|=1\} \qquad (2)$$

נכונה במקרה זה, והסופרמום (0) מתקבל בכל נקודה z כנ"ל.

<u>נדון לכן במקרה</u> $x\notin M$.

לפי משפט המרחק עבור M (תת מרחב ליניארי סגור הוא קבוצה קמורה סגורה לא ריקה!), קיים $y\in M$ יחיד כך ש- $d=\|x-y\|$

עפי הוכחת משפט הפרוק הניצב $v \doteq x-y \in M^\perp$, וכמוכן $\|v\|=\|x-y\|=d$.
$v\neq 0$ (אחרת $x=y\in M$, בניגוד למגרה הנתון!), ו- $x=y+v$
לכן $\|v\|\neq 0$, ו- $\tilde{z} \doteq \frac{1}{\|v\|}v$ מוגדר היטב, שייך ל-$M^\perp$
(כי $M^\perp$ תת-מרחב לינארי) $\|\tilde{z}\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1$. לכן

$$\sup\{(x,z) \mid z\in M^\perp, \|z\|=1\} \geq (x,\tilde{z}) = \frac{1}{\|v\|}(x,v)$$

$$= \frac{1}{\|v\|}(y+v,v) = \frac{1}{\|v\|}\Big[\underbrace{(y,v)}_{0,\ \text{כי } y\in M \text{ ו- } v\in M^\perp} + \underbrace{(v,v)}_{\|v\|^2}\Big] = \|v\| = d \qquad \textbf{(3)}$$

מאידך, לכל $z\in M^\perp$ עם $\|z\|=1$,

$$(x,z) = (y+v,z) = \underbrace{(y,z)}_{0,\ \text{כי } y\in M \text{ ו- } z\in M^\perp} + (v,z) \leq |(v,z)| \leq \|v\|\underbrace{\|z\|}_{1}$$

חלק ממשי קטן או שווה לערכו המוחלט

לפי קושי-שוורץ

$$= \|v\| = d \qquad (4)$$

לכן $\sup\{(x,z) \mid z\in M^\perp, \|z\|=1\} \leq d$

שני אי השוויונות (3) ו (4) נותנים את השוויון (2), כדרוש,
ולפי החלק הימני של (3), $d=(x,\tilde{z})$, כלומר הסופרמום
ב (2) מתקבל עבור $z=\tilde{z}$.

א. משפט הולדר, עם המעריכים הצמודים $s=\frac{p}{r}\ (>1)$ ו- $t=\frac{s}{s-1}=\frac{p}{p-r}$,
ועם הפונקציות המדידות האי-שליליות $|f|^r$ ו- 1, נותן

$$\|f\|_r^r \doteq \int |f|^r \, d\mu = \int |f|^r \cdot 1 \, d\mu \le \left(\int |f|^{rs} \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int 1^t \, d\mu\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \mu(X)^{\frac{1}{t}}$$

(כי $rs=p$). לכן

$$\|f\|_r \le \mu(X)^{\frac{1}{rt}} \|f\|_p$$

אולם

$$\frac{1}{rt} = \frac{p-r}{rp} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$$

ולכן אי השוויון המבוקש הוכח, לכל $f \in L^p(\mu)$ נתון.
במיוחד $\|f\|_r < \infty$, ולכן $f \in L^r(\mu)$ לכל $f \in L^p(\mu)$, דהיינו $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$.

ב. אם $x = \{x_n\} \in \ell^r$, $\sum |x_n|^r < \infty$. במיוחד
$|x_n|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ולכן $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. במיוחד $\{x_n\}$ חסומה.
יהי K חסם עבור x_n: $|x_n| \le K$ לכל n.
אזי לכל $p \in (r, \infty)$, אם $x \in \ell^r$,

$$\sum |x_n|^p = \sum |x_n|^r |x_n|^{p-r} \le K^{p-r} \sum |x_n|^r < \infty$$

כלומר $x \in \ell^p$. זה מוכיח ש $\ell^r \subseteq \ell^p$ (עבור $1 \le r < p < \infty$)
מאידך, עבור $1 \le r < p < \infty$, הרי $\frac{1}{p} < \frac{1}{r}$. נבחר a
כך ש $\frac{1}{p} < a < \frac{1}{r}$, ונגדיר $x = \{\frac{1}{n^a}\}$. אזי
$\sum_n |x_n|^p = \sum_n \frac{1}{n^{ap}} < \infty$ כי $ap > 1$, ו $\sum |x_n|^r = \sum_n \frac{1}{n^{ar}}$ מתבדר, כי $ar < 1$.
כלומר $x \in \ell^p \setminus \ell^r$. לכן $\ell^r \subset \ell^p$