תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + ... + d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \ge 2$.
ב. $|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y)$.
ג. $\forall A \subseteq X, |d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d : X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.

3. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d_{\min}((x,y),(x',y')) = \min\{d(x,x'), d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$(כאשר d היא המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$).
ב. $d((x,y),(x',y')) = |x| + |y| + |x'| + |y'|$ על $\mathbb{R}^2$.
ג. $d_{\sum}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$ על $X \times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.

4. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$. ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$.
תארו את הכדור $B_{d_7}(3, \dfrac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_7)$.

5. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1, x_2 \in X$ ו $r_1, r_2 > 0$, ונניח ש $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. נסמן

$$r = \min\{r_1 - d(x_1,p), r_2 - d(x_2,p)\}$$

. הוכיחו ש

$$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$$

.

6. נגדיר את הרדיוס של תת קבוצה $A \subseteq X$ להיות

$$rad\,A := \inf_{a \in A} \sup_{b \in A} d(a,b)$$

הוכח או הפרך

(א) $rad\,A = \frac{1}{2}\,diam\,A$

(ב) $rad\,A \leq \frac{1}{2}\,diam\,A$

(ג) $rad\,A \geq \frac{1}{2}\,diam\,A$

(ד) $rad\,A = diam\,A$

כיצד תשובתכן תשתנה במקרה ש-X אולטרה-מטרי

7. שאלת אתגר: מצאו $X \subseteq \mathbb{R}^n$ תת קבוצה חסומה ושיכון איזומטרי $f : X \to X$ שאינו איזומטריה (כלומר הוא לא על).

8. שאלת אתגר: הראו שאם $(X, ||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1, r_1), B(a_2 r_2)$ כך ש $r_1 < r_2$ וגם $B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1)$.