תרגיל 10

1. בתרגיל הקרוב נראה שמכפלה אינסופית של קבוצות קומפקטית סדרתית לאו דווקא קומפקטית סדרתית. נזכיר שמרחב הוא קומפקטי סדרתית אם לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת. נראה בנוסף שמרחב קומפקטי הוא לאו דווקא קומפקטי סדרתית. נסמן את קבוצת קנטור כ- $C := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ונסתכל על המרחב $X := \{0,1\}^C$ עם טופולוגיית המכפלה. כלומר, זה מרחב הפונקציות הבינאריות על קבוצת קנטור עם טופולוגיית ההתכנסות הנקודתית. לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ נגדיר $\rho_{n_0} \in X$ ע"י

$$\rho_{n_0}\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = a_{n_0}$$

הראו של-$X \supseteq \{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אין תת סדרה מתכנסת.

<u>**פתרון:**</u>

נניח בשלילה שקיימת תת סדרה $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ כך ש-$\{\rho_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ מתכנסת. לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה, לכל $\overline{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ ההטלה $\pi_{\overline{a}} : X \to \{0,1\}$ שמוגדרת ע"י

$$\pi_{\overline{a}}(\rho) := \rho(\overline{a})$$

רציפה. לפי עקרון חצי היינה, $\{\pi_{\overline{a}}(\rho_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\rho_{n_k}(\overline{a})\}_{k\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ב-$\{0,1\}$ לכל $\overline{a} \in C$. נגדיר

$$a_n := \begin{cases} 1 & \exists\, k \in 2\mathbb{N} : n = n_k \\ 0 & else \end{cases}$$

כלומר, זהו האיבר ב-C שאיבריו הם 1 רק במקומות הזוגיים של תת הסדרה $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ו-0 בשאר הזמן. מכאן ש-

$$\rho_{n_k}(\overline{a}) = \begin{cases} 1 & k \in 2\mathbb{N} \\ 0 & else \end{cases}$$

ובפרט $\{\rho_{n_k}(\overline{a})\}_{k\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת - סתירה!

2. בתרגיל הבא $\hat{X}$ יסמן את קומפקטיפיקציית הנקודה של X.

(א) הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2.

פתרון:

נראה של 0 אין סביבה קומפקטית. נניח בשלילה שיש סביבה קומפקטית $0 \in K$ אזי קיימת קבוצה פתוחה בסיסית $B(0,\varepsilon)$ עבור ε לא רציונלי, כך ש $0 \in B[0,\varepsilon]\cap\mathbb{Q} \subseteq K$,

מה שאומר ש $B[0,\varepsilon]\cap\mathbb{Q}$ קומפקטי כי הוא סגור בתוך קומפקטי. מכיוון ש-ε לא רציונלי,

$$[-\epsilon,\epsilon]\cap\mathbb{Q}=\bigcup_n\left((-\epsilon+\frac{1}{n},\epsilon-\frac{1}{n})\cap\mathbb{Q}\right)$$

זהו כיסוי פתוח שאין לו תת כיסוי סופי. סתירה.

(ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.

פתרון:

תהא $S\subseteq\hat{\mathbb{Q}}$ קבוצה

($\Rightarrow$) נניח S קומפקטית ב $\hat{\mathbb{Q}}$. אם $S\subseteq\mathbb{Q}$ אזי היא קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ ולכן סגורה ב $\hat{\mathbb{Q}}$ (מהגדרה).

אם $\infty\in S$ אזי $S=S'\cup\{\infty\}$ עבור $S'\subseteq\mathbb{Q}$. נותר להראות כי S' סגורה ב $\mathbb{Q}$. נניח בשלילה שלא אזי קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq S'$ אבל $x_n\to x\notin S'$. ראינו כי $K=\{x_n\}_n\cup\{x\}\subseteq\mathbb{Q}$ קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ (סדרה+ גבול היא קבוצה קומפקטית). כמו כן, סדרה מתכנסת ב-$\mathbb{Q}$ שמורידים ממנה את הגבול היא דיסקרטית. לכן נגדיר כיסוי של S ע"י $K^c\cap S$ (פתוחה בS מהגדרת טופולוגיית תת מרחב), והנקודונים בסדרה. לכיסוי זה אין תת כיסוי סופי. סתירה.

($\Leftarrow$) נתון S סגורה. אם $S\subseteq\mathbb{Q}$ אז מהגדרת הטופולוגיה על $\hat{\mathbb{Q}}$, S קומפקטית. אם $S=S'\cup\{\infty\}$ עבור S' סגורה ב $\mathbb{Q}$: יהי $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של S. אחת הקבוצות מכילה את ∞. נניח $\infty\in O_j$. אז מהגדרת הטופולוגיה O_j^c קומפקטית ב-$\mathbb{Q}$. S' סגורה ב-$\mathbb{Q}$, לכן $S'\cap O_j^c$ קומפקטית, כתת קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי. האוסף $\{O_i\}$ הוא כיסוי פתוח גם של $S'\cap O_j^c$ ולכן קיים לו תת כיסוי סופי. תת הכיסוי הסופי, ביחד עם O_j, מהווה תת כיסוי סופי של S. לכן S קומפקטית.

.3

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע"י: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\iff x_1+y_1^2=x_2+y_2^2$. הוכיחו ש $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^2/\sim$. רמז: מצאו את העתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2/\sim$.

הוכחה:

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=x+y^2$. f רציפה כפולינום. מכבדת את יחס השקילות באופן חזק, וכן f על, כי למשל מקור של r הוא $(r,0)$. לכן קיימת $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\to\mathbb{R}$ והיא חח"ע ורציפה. נוכיח שההופכית רציפה. נגדיר את ההופכית כך $g(r)=[(r,0)]$. זה בעצם הרכבה של שתי פונקציות: $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $g'(r)=(r,0)$, ופונקציית המנה ששולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו. g' רציפה כי היא רציפה רכיב-רכיב (פונקציית הזהות ופונקציה קבועה), ופונקציית המנה רציפה מההגדרה של טופולוגיית המנה. כלומר, g היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

קל לראות שg וf הופכיות אחת לשניה.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\iff x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

פתרון:

$\mathbb{R}^2/\sim\cong[0,\infty)$.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה הבאה: $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ ע"י $f(x,y)=x^2+y^2$. f רציפה כפולינום ומכבדת את יחס השקילות בצורה החזקה. כמו כן f על, כי המקור

של $r \geq 0$ הוא $(\sqrt{r},0)$. לכן יש $\hat{f}\,:\,\mathbb{R}^2/\sim\to[0,\infty)$ מוגדרת, רציפה וחח״ע. נמצא את ההופכית. נסתכל על $g(r)=[(\sqrt{r},0)]$. קל לראות שהיא אכן ההופכית של $\hat{f}$. כמו בסעיף א, g היא הרכבה של פונקציות $g'\,:\,[0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $g'(r)=(\sqrt{r},0)$, ופונקציית המנה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/\sim$. g' רציפה רכיב-רכיב ולכן רציפה. קיבלנו שg היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

4. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע״י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x\sim y$ אם ורק אם $x=y$, או ש $|x|\geq 1\wedge|y|\geq 1$. הוכיחו ש

$$X\cong S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}$$

הוכחה:

הוכחתם בהרצאה שS^1 הומיאומורפי ל-$[0,1]$ כאשר מזהים את הנקודות 0 ו-1. כמו כן, ידוע ש-$[-1,1]\cong[0,1]$. לכן, מספיק להוכיח ש $X\cong[-1,1]/\sim$ עם יחס השקילות של זיהוי הנקודות -1 ו-1.

נגדיר $f:\mathbb{R}\to[-1,1]/\sim$ ע״י

$$f(x)=\begin{cases}[1] & |x|\geq 1\\ [x] & otherwise\end{cases}$$

קל לראות שf על ומכבדת את יחס השקילות בצורה החזקה.

נוכיח שf רציפה. נשים לב שניתן להגדיר את f בצורה הבא:

$$f(x)=\begin{cases}[1] & x\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)\\ [x] & x\in[-1,1]\end{cases}$$

כלומר, f מוגדרת בחלקים על תתי קבוצות סגורת. הוכנו בעבר שאם יש מספר סופי של קבוות סגורות שמכסות את המרחב, ופונקציה מוגדרת בחלקים על הקבוצות הסגורות, מתלכדת על החיתוכים, ורציפה בכל קבוצה סגורה, אז היר רציפה. לכן מספיק להראות שהחלקים של הפונקציה רציפה.

החלק הראשון הוא פונקציה קבועה ולכן רציף.

החלק השני הוא הרכבה של פונקציית הזהות $id:[-1,1]\to[-1,1]$ עם פונקציית המנה ולכן רציף.

לסיכום: $\hat{f}:\mathbb{R}/\sim\to[-1,1]/\sim$ מוגדר חח״ע ורציף.

כעת, נשים לב ש-$\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי, כי $\Pi|_{[-1,1]}\to\mathbb{R}/\sim$ הוא על, ו$[-1,1]$ הוא קומפקטי, וכידוע תמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית.

לסיכום: $\hat{f}$ רציף, על וחח״ע מקומפקטי להאוסדורף, ולכן העתקת מנה חח״ע, כלומר, הומיאומורפיזם.

5. הוכיחו שפונקציית מנה חח״ע היא הומיאומורפיזם.

הוכחה:

תהי $f\,:\,X\to Y$ פונקציית מנה חח״ע. בפרט, f על, חח״ע ורציפה. נוכיח שf פתוחה. ובכן, תהי $O\subseteq X$ קבוצה פתוחה. בגלל שf חח״ע, $f^{-1}(f(O))=O$. כעת מכיוון שf העתקת מנה, $f(O)$ פתוחה.

6. תנו דוגמא לפונקציה רציפה, על ופתוחה שאינה סגורה, ולפונקציה רציפה, על וסגורה שאינה פתוחה.

פתרון:

פתוחה שאינה סגורה: פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ היא רציפה על ופתוחה. היא לא סגורה כי הקבוצה $A = \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ סגורה ב$\mathbb{R}^2$ כתומנה הפוכה של f תחת הפונקציה הרציפה $f(x, y) = xy$. אבל $f[A] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, שאינה סגורה.

סגורה שאינה פתוחה: נגדיר על $\mathbb{R}$ טופולוגיה: הקבוצות הפתוחות הן הקבוצות שלא מכילה את 0. נסכל על טופולוגיית שרפינסקי $\{0, 1\}$ כאשר $\{0\}$ פתוח. נגדיר: $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ ע"י $f(-\infty, 0) = 0, f[0, \infty) = 1$. היא על. היא רציפה כי התמונה ההפוכה של $\{0\}$ לא מכילה את 0 ולכן פתוחה. היא סגורה כי כל קבוצה סגורה מכילה את 0, ולכן התמונה שלה מכילה את 1. כל תת קבוצה שמכילה את 1 היא סגורה. אבל היא לא פתוחה, כי למשל $f(\{1, 2\}) = \{1\}$ שאינו פתוח.

7. נסתכל על הספרה החד ממדית $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ עם יחס השקילות $\sim$ שמוגדר ע"י

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x = -y)$$

הראו ש-$S^1/\sim$ הומיאומורפי ל-S^1.

<u>**פתרון**</u>

נזהה את $\mathbb{R}^2$ עם $\mathbb{C}$ (כי אנחנו נרצה להשתמש בכפל מרוכבים) ונגדיר $f : S^1 \to S^1$ ע"י

$$f(z) := z^2$$

קל לראות ש-$\sim_f = \sim$, כלומר f משרה את יחס השקילות הנ"ל. בנוסף, היא בבירור רציפה ועל. אם נראה שהיא מנה אז לפי משפט המנה נקבל ש-

$$S^1/\sim = S^1/\sim_f \cong im(f) = S^1$$

ואכן, זו פונקציה רציפה ממרחב קומפקטי להאוסדורף ולכן היא סגורה. בפרט, היא מנה.

8. נסתכל על $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ עם יחס השקילות $\sim$ שמוגדר ע"י

$$x \sim y \iff \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

כלומר, מזהים יחד את כל הנקודות על ישרים שעוברים דרך הראשית. הישר הפרויקטיבי מוגדר להיות $\mathbb{RP}^1 := X/\sim$. הראו ש-$\mathbb{RP}^1$ הומיאומורפי לספירה S^1

<u>**פתרון**</u>

נסמן ב-Y את המרחב מהתרגיל הקודם. נגדיר $f : X \to S^1$ ע"י

$$f(x) := \frac{1}{\|x\|}x$$

בנוסף, תהי $q : S^1 \to Y$ פונקציית המנה מהתרגיל הקודם. קל לראות ש-f ו-q רציפות ולכן גם $q \circ f : X \to Y$. בנוסף, קל לראות ש-$q \circ f$ משרה בדיוק את יחס השקילות הנתון והיא על (כי f ו-q על). לכן, אם נראה ש-$q \circ f$ מנה אז נקבל ש-

$$X/\sim = X/\sim_{q \circ f} \cong im(q \circ f) = Y$$

לפי משפט הצמצום, מספיק להראות ש-q מנה, אבל זו נכון לפי הגדרה. לבסוף, לפי התרגיל הקודם ראינו ש-$Y \cong S^1$ ולכן $X/\sim \cong S^1$.