תרגול 3

תזכורת:

מד"ח קוואזי לינארית מסדר I:

$$a(x,y,u)\cdot u_x + b(x,y,u)\cdot u_y = c(x,y,u)$$

מד"ח לינארית:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$$

שיטת קווים אופיינים:

$$u(x,y) \to u(t,s)$$

מכלל השרשרת:

$$u_t = u_x \cdot \underbrace{x_t}_{a} + u_y \cdot \underbrace{y_t}_{b}$$

מערכת קווין אופיינים –

$$\begin{cases} x_t = a(x,y,u) \\ y_t = b(x,y,u) \\ u_t = c(x,y,u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \\ \dfrac{dy}{dt} = b \\ \dfrac{du}{dt} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int dx = \int a\, dt \\ \int dy = \int b\, dt \\ \int du = \int c\, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = \int a\, dt + f_1(s) \\ y(t,s) = \int b\, dt + f_2(s) \\ u(t,s) = \int c\, dt + f_3(s) \end{cases}$$

תרגיל:

נתון קו התחלתי ($t=0$):

$$\Gamma \coloneqq \{x(0,s), y(0,s), u(0,s)\}$$

פתרו את המד"ח:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 2 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

פתרון:

$$a = 1\,, b = 1\,, c = 1$$

$$x_t = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \int dx = \int dt \Rightarrow x(t,s) = t + f_1(s)$$

$$y_t = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow \int dy = \int dt \Rightarrow y(t,s) = t + f_2(s)$$

$$u_t = 2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2 \Rightarrow \int dx = \int 2\, dt \Rightarrow u(t,s) = 2t + f_3(s)$$

קו התחלתי:

$$x(0,s) = s$$

$$y(0,s)=0$$

$$u(0,s)=s^2$$

לכן –

$$s=x(0,s)=f_1(s)\Rightarrow f_1(s)=s$$

$$0=y(0,s)=f_2(s)\Rightarrow f_2(s)=0$$

$$s^2=u(0,s)=f_3(s)\Rightarrow f_3(s)=s^2$$

קיבלנו ש –

$$\begin{cases} x(t,s)=t+s \\ y(t,s)=t \\ u(t,s)=2t+s^2 \end{cases}$$

נזכור כי אנו יכולים לחזור למשתנים x,y לפי משפט הפונקציה ההפוכה אם $J\neq 0$ כאשר $t=0$ (כלומר "תנאי החיתוך" מתקיים). נחשב –

$$J|_{t=0}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}|_{t=0}=\begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix}_{t=0}=\begin{vmatrix} a & b \\ x_s & y_s \end{vmatrix}_{t=0}=\begin{vmatrix} a & b \\ x_s(0,s) & y_s(0,s) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=-1\neq 0$$

ואז ניתן לבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} x=t+s \\ y=t \\ u=2t+s^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=y}$$

$$s=x-t=x-y$$

$$\boxed{s=x-y}$$

<u>פתרון פרטי:</u>

$$\boxed{u(x,y)=2y+(x-y)^2}$$

<u>היטל קו התחלתי:</u>

במישור xy מתקיים:

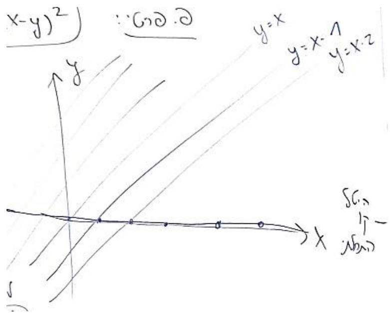
$$\big(x(0,s),y(0,s)\big)=(s,0)$$

היטל קו אופייני במישור xy:

$$x=t+s$$

$$y=t$$

$$\Rightarrow y=x-s$$



■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ח:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = 4 \\ x = 1 \\ z(1,y) = y^2 - 1 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

$$a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = 4$$

$$\begin{cases} x_t = \frac{1}{x} \\ y_t = \frac{1}{y} \\ z_t = 4 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int 1\,dt \Rightarrow \frac{x^2(t,s)}{2} = t + \widetilde{f_1}(s) \Rightarrow x^2(t,s) = 2t + f_1(s)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int 1\,dt \Rightarrow \frac{y^2(t,s)}{2} = t + \widetilde{f_2}(s) \Rightarrow y^2(t,s) = 2t + f_2(s)$$

$$\frac{dz}{dt} = 4 \Rightarrow \int 1\,dz = \int 4\,dt \Rightarrow z(t,s) = 4t + f_3(s)$$

כעת, מתנאי ההתחלה:

$$z(1,y) = y^2$$

$$\Rightarrow x(0,s) = 1$$

$$\Rightarrow y(0,s) = s$$

$$\Rightarrow z(0,s) = s^2 - 1$$

נציב:

$$1 = [x(0,s)]^2 = f_1(s) \Rightarrow f_1(s) = 1$$

$$s^2 = [y(0,s)]^2 = f_2(s) \Rightarrow f_2(s) = s^2$$

$$s^2 - 1 = [z(0,s)^2] = f_3(s) \Rightarrow f_3(s) = s^2 - 1$$

מערכת קווים אופיינים או משטח פותר:

$$\begin{cases} x^2(t,s) = 2t + 1 \\ y^2(t,s) = 2t + s^2 \\ z(t,s) = 4t + s^2 - 1 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי החיתוך:

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} a & b \\ x_s(0,s) & y_s(0,s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x(0,s)} & \frac{1}{y(0,s)} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{s} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ולכן נוכל לחזור למשתנים x, y:

$$\begin{cases} x^2 = 2t + 1 \\ y^2 = 2t + s^2 \\ z = 4t + s^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2t = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow s^2 = y^2 - 2t = y^2 - x^2 + 1$$

לכן –

$$z = (x,y) = 2(x^2 - 1) + y^2 - x^2 + 1 - 1$$

<u>פתרון פרטי:</u>

$$\boxed{z(x,y) = x^2 + y^2 - 2}$$

כעת –

$$\text{היטל קו התחלתי}\begin{cases} x(0,s) = 1 \\ y(0,s) = s \end{cases}$$

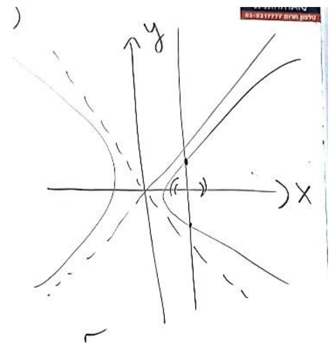
קו ישר שמקביל לציר ה – y.

$$\text{היטל קו אופייני}\begin{cases} x^2 = 2t + 1 \\ y^2 = 2t + s^2 \end{cases}$$

לכן קיבלנו היטל קו אופייני:

$$y^2 = x^2 - 1 + s^2$$

לכל s שנקבע קיבלנו היפרבולה.



■

תזכורת:

מד"ח קוואזי לינארית – פתרון בעזרת שיטת לגרנז':

בהינתן מד"ח קוואזי לינארית מסדר I –

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

נזכור מהשיטה הקודמת –

$$x_t = a \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow dt = \frac{dx}{a}$$

$$y_t = b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = b \Rightarrow dt = \frac{dy}{b}$$

$$u_t = c \Rightarrow \frac{du}{dt} = c \Rightarrow dt = \frac{du}{c}$$

ונקבל ש (שיטת לגרנז') –

$$\boxed{\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}}$$

מבין 3 בוחרים 2 שוויונות, עושים הפרדת משתנים ואינטגרציה ומקבלים:

$$c_1 = \varphi_1(x,y,u)$$

$$c_2 = \varphi_2(x,y,u)$$

הפתרון הכללי של המד"ח קוואזי לינארית נראה מהצורה:

$$\begin{cases} F(\varphi_1,\varphi_2) = 0 \\ \text{או} \\ F(\varphi_1) = \varphi_2 \\ \text{או} \\ F(\varphi_2) = \varphi_1 \end{cases}$$

<u>הערה:</u>

אם $c=0$ נוכל לבחור מראש $\varphi_1=u$ ואז משיטת לגרנז' נותר למצוא רק את φ_2.

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ח בעזרת שיטת לגרנז':

א) מצאו פתרון כללי.

ב) מצאו פתרון פרטי.

$$\begin{cases} xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=xy \\ u\left(x,\sqrt{x}\right)=0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

א) נחשב:

$$a=xu\,,b=yu\,,c=xy$$

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{du}{c}$$

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{yu}=\frac{du}{xy}$$

נבחר:

$$(1)\ \frac{dx}{xu}=\frac{dy}{du}$$

$$(3)\ \frac{dx}{xu}=\frac{du}{dxy}$$

נפתור:

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{yu}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

$$\ln|x|=\ln|y|+\widetilde{c_1}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\widetilde{c_1}$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=c_1=\varphi_1(x,y,u)}$$

וכן:

$$\frac{dx}{xu}=\frac{du}{xy}$$

$$\frac{dx}{u}=\frac{du}{y}$$

נזכור מקודם כי: $y=\frac{x}{c_1}$ ולכן –

$$\frac{dx}{u}=\frac{du}{\frac{x}{c_1}}$$

$$\frac{dx}{u}=\frac{c_1}{x}du$$

$$\int x\,dx=\int c_1u\,du$$

$$\frac{x^2}{2}=\frac{c_1u^2}{2}+\widetilde{c_2}$$

$$x^2=c_1u^2+c_2$$

נציב בחזרה:

$$x^2=\frac{x}{y}u^2+c_2$$

$$\boxed{x^2-\frac{x}{y}u^2=c_2=\varphi_2}$$

לכן קיבלנו פתרון כללי:

$$F\left(\frac{x}{y},x^2-\frac{x}{y}u\right)=0$$

בצורה אחרת (יותר נוחה כי אז יש רק x,y בתור הארגומנט של F):

$$F\left(\frac{x}{y}\right)=x^2-\frac{x}{y}u^2$$

כאשר F פונקציה גזירה כלשהי.

ב) לצורך מציאת פתרון פרטי, נציב תנאי התחלה בתוך הפתרון הכללי ונראה איך F "מתנהגת" על תנאי ההתחלה ונוכל להסיק לגבי הפתרון הפרטי.

<u>פתרון כללי:</u>

$$F\left(\frac{x}{y}\right)=x^2-\frac{x}{y}u^2$$

$$u\left(x,\sqrt{x}\right)=0$$

לכן –

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) = x^2 - \frac{x}{\sqrt{x}}\underbrace{\left[u\left(x,\sqrt{x}\right)\right]^2}_{=0}$$

$$F\left(\sqrt{x}\right) = x^2$$

נסמן $t = \sqrt{x}$ ונקבל:

$$F(t) = t^4$$

לכן –

$$\boxed{\frac{x^4}{y^4} = x^2 - \frac{x}{y}u^2}$$

וזהו הפתרון הפרטי (צורה סתומה). ניתן לבודד את u:

$$x^4 = y^4x^2 - xy^3u^2$$

$$xy^3u^2 = y^4x^2 - x^4$$

$$u^2 = \frac{y^4x^2 - x^4}{xy^3} = xy - \frac{x^3}{y^3}$$

$$u = \pm\sqrt{xy - \frac{x^3}{y^3}}$$

$$u\left(x,\sqrt{x}\right) = 0$$

■

<u>הערה:</u>

מתי עדיף להשתמש בשיטת לגרנז':

1. אם מבקשים פתרון כללי.
2. אם תנאי ההתחלה הוא מסובך.
3. אם מערכת הקווים האופיינים קשה לפתירה.

<u>תרגיל:</u>

נתונה המד"ח:

$$\begin{cases}(1+x^2)z_x + xy\cdot z_y = 0 \\ z(0,y) = y^2\end{cases}$$

א) מצאו פתרון כללי.

ב) מצאו פתרון פרטי.

<u>פתרון:</u>

א) המקדמים הינם:

$$a = 1 + x^2\ , b = xy\ , c = 0$$

$c = 0$ ולכן נוכל לבחור:

$$\varphi_1 = z(x, y)$$

לפי שיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{xy} \ \ \backslash\cdot 2x$$

$$\int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \int \frac{2}{y} dy$$

$$\ln(1 + x^2) = 2\ln(y) + \widetilde{c_2}$$

$$\ln\left(\frac{1 + x^2}{y^2}\right) = \widetilde{c_2}$$

$$\frac{1 + x^2}{y^2} = c_2 = \varphi_2$$

כעת הפתרון הכללי נכתוב לפי:

$$z(x, y) = F\left(\frac{1 + x^2}{y^2}\right)$$

או לפי:

$$F\left(\frac{1 + x^2}{y^2}, z\right) = 0$$

ב) פתרון פרטי:

$$z(0, y) = y^2$$

$$y^2 = z(0, y) = F\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{y^2}\right) = y^2$$

אם נסמן $t = \frac{1}{y^2}$ אז:

$$F(t) = \frac{1}{t}$$

ולכן:

$$z = F\left(\frac{1+x^2}{y^2}\right)$$

$$F(t) = \frac{1}{t}$$

$$z = F\left(\frac{1+x^2}{y^2}\right) = \frac{y^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{z = \frac{y^2}{1+x^2}}$$

$$z(0,y) = y^2$$

פתרון פרטי למד"ח.

■

<u>מיון מד"ח מסדר $\mathbb{I}$</u>

מד"ח מסדר $\mathbb{I}$:

$$a \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

המטרה בפרק זה היא למיין את המד"ח ולהביא אותה לצורה קנונית:

<u>מיון/סיווג:</u>

ישנם 3 סוגים למיון/סיווג המד"ח –

$$\Delta = b^2 - ac$$

א) אם $\Delta > 0$, אז נאמר שהמד"ח מסדר $\mathbb{I}$ היא מסוג היפרבולית.

ב) אם $\Delta = 0$, אז נאמר שהמד"ח מסדר $\mathbb{I}$ היא מסוג פרבולית.

ג) אם $\Delta < 0$, אז נאמר שהמד"ח מסדר $\mathbb{I}$ היא מסוג אליפטית.

<u>צורה קנונית:</u>

א) אם $\Delta > 0$ – סוג המד"ח היא היפרבולית. צורה קנונית אפשרית:

$$u_{pp} - u_{qq} = F(p, q, u, u_p, u_q)$$

או

$$u_{pq} = F(p, q, u, u_p, u_q)$$

ב) אם $\Delta = 0$ – סוג המד"ח היא פרבולית. צורתה הקנונית:

$$u_{pp} = F(p, q, u, u_p, u_q)$$

או

$$u_{qq} = F(p, q, u, u_p, u_q)$$

ג) אם $\Delta < 0$ – סוג המד"ח היא אליפטית. צורתה הקנונית:

$$u_{pp} + u_{qq} = F(p, q, u, u_p, u_q)$$