61

הפקולטה למדעים מדויקים

אוניברסיטת תל-אביב

21.01.2003

מועד א' סמסטר א' תשס"ג

מבחן בחדו"א לפיסיקאים

מרצים: ד"ר אינה שצ'רבק, ד"ר יולי אידלמן

משך המבחן **3 שעות**
יש לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
חומר עזר מחשבון כיס ודף נוסחאות המצורף לטופס.
ערך כל שאלה 25 נקודות.

בהצלחה!

שאלה 1.

(א) הסדרה $\{a_n\}$ נתונה על ידי $a_1=3$, $a_{n+1}=\sqrt{4a_n}$.

הוכח כי הסדרה מתכנסת ומצא את הגבול.

(ב) הוכח כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ עם $a_n \geq 0$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס. תן דוגמה של טור עם איברים אי שליליים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שהוא מתבדר אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ מתכנס.

שאלה 2.

(א) נתונים מספרים $a_0, a_1, \dots, a_n$ המקיימים

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

הוכח כי לפולינום $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ יש לפחות שורש אחד בקטע $(0,1)$.

(ב) הוכח כי $1+2\ln x \leq x^2$ לכל $x>0$.

שאלה 3.

(א) נתון: $f(x)$ גזירה פעמיים לכל x. הוכח

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}$$

(ב) נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

G-20

האם $f(x)$ רציפה לכל x? האם $f(x)$ גזירה לכל x?
אם כן, האם $f'(x)$ רציפה לכל x? הסבר.

<u>שאלה 4.</u>

(א) חשב $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ כאשר

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{\pi n}{n}\right).$$

(ב) נתון כי הפונקציה $f(x)$ רציפה ו־ $f(2)=5$
הוכח כי קיימת סביבה של נקודה 2 כך שלכל x בסביבה זו
מתקיים $f(x) > x - \sin x$.

<u>שאלה 5.</u>

(א) נתון כי הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x ומקיימת

$$f(x)\geq 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 .$$

הוכח כי קיימת נקודה c כך ש $f(x)\leq f(c)$ לכל x.

(ב) האם קיים גבול הסדרה $\{a_n\}$, כאשר

$a_n = \int_1^n e^{-t^2}\,dt$. תן הסבר מלא.

<u>**בהצלחה!**</u>

טריגונומטריה (ג)

זהויות

הזהויות היסודיות

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

סכום והפרש זויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

זוית כפולה וחצי זוית

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

סכום והפרש פונקציות

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

מכפלת פונקציות

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

(ב) נוסחת טיילור :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

907995	מחברת מס' I מתוך II מחברות

61

אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את
וקרא בעיון

תאריך הבחינה 21/1/03

שם הקורס פיסיקה מצב מוצק

שם המורה יולי איידלמן

החוג/המגמה פיסיקה מורחב

הוראות

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.

25 25 24 25

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 99

המחברת נבדקה ביום 27/01/03

חתימת המורה

1. א,

תחילה נוכיח כי לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים גבול:

נחלק את ההוכחה לשני חלקים: א. שהסדרה חסומה מלמעלה ב. שהסדרה מונוטונית עולה.

נוכיח את חלק א. באינדוקציה:

~~הנחת האינדוקציה:~~

$$a_1 = 3 < 4$$

הנחת האינדוקציה: $a_n < 4$

צעד האינדוקציה: $a_{n+1} < 4$

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n} = 2\sqrt{a_n} < 2\cdot\sqrt{4} = 4$$

($\sqrt{a_n} < \sqrt{4}$ הנחת האינדוקציה)

כיון שהוכחנו כי $a_n < 4$ לכל n

נוכיח את חלק ב. (שהסדרה מונוטונית עולה)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{a_n}} > \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

$(a_n < 4)$

כיון ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, כלומר $a_{n+1} > a_n$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה. ומשני התנאים אנו יודעים כי קיים גבול.

נמצא את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ולכן:

$$a = \sqrt{4a}$$

$$a^2 = 4a$$

$$\boxed{a = 4}$$

1. ד. * נשתמש במבחן ההשוואה. נניח כי קיים (מספר) n_0, כך שלכל $n>n_0$: $a_n^2 < a_n$.

תנאי הכרחי לקיום גבול של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא

כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, כלומר עבור כל $\varepsilon>0$ (ובפרט

$\varepsilon = 1$) קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים:

$$|a_n - 0| = |a_n| < 1$$

ומן ~~הנתון~~ הנתון כי $a_n \geq 0$ מתקבל אי שוויון:

$$0 < a_n < 1 \quad (n>n_0 \text{ לכל})$$

מן העובדה ש-$1 > a_n > 0$ נובע כי $a_n^2 < a_n$ לכל

$n>n_0$. כלומר ניתן להשתמש במבחן ההשוואה

ולהסיק כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (נתון)

אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ גם כן מתכנס.

* דוגמא: לטור ש-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר, אך $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ מתכנס

$$b_n = \frac{1}{n}$$

✓

2 א. נסמן ב- $P'(x)$ את הפונקציה הקדומה של $P(x)$.

$$P'(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots \frac{a_n}{n+1}x^n$$

נחשב את ערכי $P'(x)$ ב- $x=0$ ו- $x=1$

$P'(0) = 0$, $P'(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots \frac{a_n}{n+1} = 0$ (נתון)

עפ"י משפט ~~קיום~~ כל הפונקציה מקבלת את המינימום והמקסימום של בקטע הפתוח $(0,1)$ ובנקודה זו הנגזרת של הפונקציה (שהיא $P(x)$) שווה ל- 0, כלומר קיימת נקודה בקטע $(0,1)$ שבה $P(x) = 0$ (מ.ש.ל)

$$1 + 2\ln x \le x^2$$

$$1 + \ln x^2 \le x^2$$

$$1 \le x^2 - \ln x^2$$

$$1 \le \ln e^{x^2} - \ln x^2$$

$$1 \le \ln\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)$$

עולה $\ln(x)$ מונוטונית ולכן מכיוון ש

$$e \le \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

$$e \cdot x^2 \le e^{x^2}$$

סעיף 4 ב' בעמ' הבא

2. ב. צ"ל: $1+2\ln x \le x^2 \iff 0 \le x^2-2\ln x-1$

נסמן פונקציה: $f(x)=x^2-2\ln x-1$

נפתח טור טיילור עם שארית לגראנז' סביב הנקודה $x=1$:

$$f(1)=1^2-2\ln 1-1=0$$

$$f'(1)=2x-\frac{2}{x}\Big|_{x=1}=2-2=0$$

$$f''(c)=2+\frac{2}{x^2}\Big|_{x=c}=2+\frac{2}{c^2}>0$$

עבור כל c

טור טיילור, (c נמצא בין x ל-1)

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(1)+\frac{(x-1)^2}{2}f''(c)=$$

$$=0+0+\frac{(x-1)^2}{2}\left(2+\frac{2}{c^2}\right)=$$

$$=(x-1)^2\left(1+\frac{1}{c^2}\right)\geq 0$$

חיובי עבור כל x   חיובי לכל c

כלומר $f(x)\geq 0$ עבור כל $x>0$, ולכן:

$$0\leq x^2-2\ln x-1$$

$$2\ln x+1\leq x^2$$

מש"ל

4. א.

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots \frac{n\pi}{n}\right) =$$

מה זה?

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}\cos x \Big|_{\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}$$

איפה הסבר?

ד.

$g(x) = x - \sin x$ (נסמן)

$G = \lim_{x\to 2} g(x)$ (נסמן)

מכיוון ש $g(x)$ פונקציה רציפה

$$G = \lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 2 - \sin 2 \cong 1.0907$$

מן הרציפות

קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x \in (2-\delta_1, 2+\delta_1)$ מתקיים

$$|g(x) - G| < \frac{1}{2}$$

כלומר $g(x) < G + \frac{1}{2} \cong 1.59 < 1.6$ (1)

כמו-כן, מן הרציפות של $f(x)$

נובע כי קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x \in (2-\delta_2, 2+\delta_2)$

מתקיים

$$|f(x) - 5| < \frac{1}{2}$$

(2) $4.5 < f(x)$

ניקח $\delta = \min\{\delta_2, \delta_2\}$ וכך ברור כי לכל

$x \in \{2-\delta, 2+\delta\}$ מתקיימים אי השוויונים (1) ו-(2) ולכן

$$g(x) < 1.6 < 4.5 < f(x)$$

כלומר, $g(x) < f(x)$ בסביבת $(x-\delta, x+\delta)$

5.א. אם הפונקציה מקיימת $f(x)=0$ עבור כל x, אז
סיימנו כי $(0 = f(x) \leq f(2)=0)$, אם לא אז

אז ברור כי קיימת נקודה c' כך ש:

$$f(c') > 0$$

נסמן $f(c') = \varepsilon$.

מהגדרת הגבול ב-∞ נובע כי קיים x_1, כך
שלכל $x > x_1$ מתקיים

$$(1) \quad f(x) < \varepsilon = f(c')$$

ושוב מהגדרת הגבול ב-$(-\infty)$ נובע כי קיים x_2, כך
שלכל $x < x_2$ מתקיים

$$(2) \quad f(x) < \varepsilon = f(c')$$

נקח $x_0 = 1+\max\{|x_1|, |x_2|, |c'|\}$ ברור כי אי-שוויונים
(1) ו-(2) מתקיימים עבור כל x שמקיים $|x| > x_0$, כלומר עבור כל x מחוץ לקטע הסגור
$[-x_0, x_0]$. מן הרציפות של הפונקציה ידוע, כי היא
מקבלת ערך מקסימלי בקטע סגור. כלומר
קיימת נקודה c כך ש $f(c) \geq f(x)$ עבור
כל x שמקיים $|x| < x_0$ ובפרט, עבור
$x = c'$ מתקיים $f(c) \geq f(c')$ לכן נוכל לטעון
כי עבור כל x

$$f(x) \leq f(c)$$

(מ.ש.ל.)

5. ג. כן, קיים גבול.

תחילה נוכיח כי קיים גבול לסדרה

$$b_n = \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{t}\Big|_1^n = 1$$

מכיוון ש a_n ו b_n סדרות חיוביות (תוי ש e^{-t^2} ו $\frac{1}{t^2}$ > 0

עבור כל $0<t$, לכן גם האינטגרל שלהם גדול מ-0

אז אנו יכולים להשתמש במבחן ההשוואה, כלומר

מספיק להוכיח כי קיים t_0 כך שלכל $t>t_0$

$a_n \le b_n$. נוכיח זאת:

$$\left(e^{-t^2} \le \frac{1}{t^2}\right)$$

$$e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} < \frac{1}{t^2}$$

$$t^2 < e^{t^2}$$

(1) $t^2 < e^{\sqrt{t^2}}$

אנו יודעים שקיים t שממנו אז אי-שוויון (1) מכיוון

הוכחנו כי ק"מ t_0 ~~…~~ שעבור $t_0<t$

מתקיים $e^{-t^2} < \frac{1}{t^2}$ ולכן

נוכל להשתמש במשפט ההשוואה על אינטגרלים

ידוע שמכיוון שהסדרה $b_n=\int_1^n \frac{1}{t^2}dt$

שואפת לגבול סופי ~~מתכנסת~~, אז גם הסדרה $a_n=\int_1^n e^{-t^2}dt$

(~~מתכנסת~~ שואפת לגבול סופי)

(הוכח שגם $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, וכך שבכלל, מכיוון

שהפונקציה e^{-t^2} זוגית, שגם $\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-t^2}dt$ קיים סופי)