1. הרדיוס של כוכב אקראי בגלקסיה הוא משתנה מקרי המתפלג נורמלית כ- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (שימו לב, שמשתנה מקרי נורמלי יכול לקבל ערכים שליליים $x \in (-\infty, \infty)$, אולם אין משמעות לרדיוס שלילי. אנו נניח שניתן להזניח את "הזנב" של צפיפות הרדיוסים מתחת לאפס).
   א. מה ההסתברות שהרדיוס הממוצע של $m$ כוכבים שנבחרו באקראי יהיה גדול מ-$2\mu$?
   ב. האסטרונום זוהר כוכבי מודד בכל יום רדיוס של כוכב אקראי במשך $m$ ימים. אם יגלה כוכב שרדיוסו גדול מ-$2\mu$ יזכה בפרס כוכב הזהב בסך $K$ שקלים. לא ניתן לזכות פעמיים, כך שאין משמעות לכמות הכוכבים הגדולים שנמצאו – רק לכך שהכמות גדולה מאפס. מהי תוחלת סכום הזכייה של מר כוכבי?
   ג. עלות החיפוש של הכוכבים היא $S$ שקלים ליום. מר כוכבי מחליט לחפש כוכב שרדיוסו גדול מ-$2\mu$ עד לזכייה בפרס. מהי תוחלת הרווח שלו? (הרווח נתון על ידי $R = K - DS$ כאשר $D$ מספר הימים שנדרשו לחיפוש הכוכב המבוקש)
   ד. נתון כי מר כוכבי כבר חיפש במשך יומיים בלא הצלחה. מהי תוחלת הרווח שלו כעת?

פתרון

א.

$$P(\bar{X} > 2\mu) = P\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X > 2\mu\right) = P\left(\sum_{i=1}^{m} X > 2\mu m\right)$$

נניח והמדידות ב"ת

$$x \sim N(\mu, \sigma^2) \;\; \rightarrow \;\; \sum_{i=1}^{m} X \sim N(m\mu, m\sigma^2)$$

$$P(\bar{X} > 2\mu) = P\left(\frac{(\sum_{i=1}^{m} X) - m\mu}{\sigma\sqrt{m}} > \frac{2\mu m - m\mu}{\sigma\sqrt{m}}\right) = P\left(Z > \frac{\mu}{\sigma\sigma}\sqrt{m}\right) = 1 - \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{m}\right)$$

ב. Y – מספר ההצלחות בm ניסויים

זוהי התפלגות בינומית כאשר הסיכוי להצלחת הניסוי הברנולי הבודד הוא הסיכוי למצוא כוכב שרדיוסו מעל 2מיו

$$Y \sim Bin(m, p)$$

$$p = P(X > 2\mu) = 1 - P(X \le 2\mu) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{2\mu - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$p = 1 - \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

הסיכוי להצליח לפחות פעם אחת

$$P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)^m$$

תוחלת כספי הזכייה

$$E[win] = K \cdot P(Y > 0) + 0 \cdot P(Y = 0) = K \cdot \left(1 - \left(\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)^m\right)$$

ג. T – כמות הניסיונות עד וכולל הניסיון המוצלח למציאת כוכב מבוקש

$$T \sim Geo(p)$$

$$E[Profit] = E[K - S(T-1)] = K - S(E[T] - 1) = K - S\left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

ד. כיוון שהתפלגות גיאומטרית הינה חסרת זיכרון התוחלת של כמות ימי החיפוש לא משתנה עם הידיעה שכבר עברו יומיים לכן ההשפעה היחידה על תוחלת הרווח תהיה פשוט יומיים נוספים של הוצאות כלומר תוחלת הרווח תהיה התוחלת הנל פחות S2.

$$E[Profit | 2unsuccesfulldays) = E[Profit] - 2S = K - S\left(\frac{1}{p} - 3\right)$$

2. משתנה מקרי רציף $X \sim U(0,1)$ נגזר מתוך צפיפות אחידה.

א. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = X^n$? (השתמשו ב-$n$ כפרמטר).

ב. בנו את הפונקציה יוצרת המומנטים של $Y$, $M_Y(t)$ עבור $n = \frac{1}{2}$.

ג. השתמשו ב- $M_Y(t)$ שמצאתם לעיל עבור $n = \frac{1}{2}$ על מנת לחשב את התוחלת $E(Y)$. הראו על ידי חישוב מפורש של $E\left(X^{\frac{1}{2}}\right)$ מתוך פונקציית הצפיפות של $X$, $F_X(t)$ שהתוצאה שקיבלתם נכונה. הערה: אין צורך לקחת גבול מסודר על מנת להעריך את הנגזרת של $M_Y(t)$ סביב $t = 0$, ניתן להסתפק בהצבה $t = 10^{-3}$, ולהשוות לחישוב המדויק של $E\left(X^{\frac{1}{2}}\right)$.

ד. מהי פונקציית ההצטברות $F_Y(b)$ של $Y$?

הגבולות של התומך נשארים זהים: $0^n = 0\,, 1^n = 1$

$$F_Y(b) = P(Y \le b) = P(X^n \le b) = P\left(\sqrt[n]{x^n} \le \sqrt[n]{b}\right) = P\left(X \le \sqrt[n]{b}\right) = F_X\left(\sqrt[n]{b}\right) = \frac{\sqrt[n]{b} - 0}{1 - 0} = \sqrt[n]{b}$$

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \le 0 \\ \sqrt[n]{b} & 0 < b < 1 \\ 1 & 1 \le b \end{cases}$$

$$f_Y(b) = F_Y'(b) = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} b^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}}$$

$$f_Y(b) = \begin{cases} \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}} & 0 < b < 1 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

$$\int_0^1 f_Y(b)db \overset{?}{=} 1 \;\; \rightarrow \;\; \int_0^1 \frac{1}{n} b^{\frac{1}{n}-1} db = \frac{1}{n}\left[\frac{b^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right]_0^1 = \left[\sqrt[n]{b}\right]_0^1 = \left[\sqrt[n]{1} - \sqrt[n]{0}\right] = 1$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(b) = \begin{cases} 2b & 0 < b < 1 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

$$M_Y(t) = E[e^{Yt}] = \int_0^1 e^{bt} f_Y(b)db = \int_0^1 e^{bt}\, 2b db = 2\int_0^1 be^{bt} db \overset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} \frac{2(e^t(t-1)+1)}{t^2}$$

$$E[Y] = M_Y'(t)|_{t=0} = \left(\frac{2\left(e^t t^3 - 2t(e^t(t-1)+1)\right)}{t^4}\right)_{t=0} \approx \left(\frac{2\left(e^t t^3 - 2t(e^t(t-1)+1)\right)}{t^4}\right)_{t=0.001} = 0.667$$

$$E[Y] = E[X^{0.5}] = \int_0^1 b^{0.5} \cdot f_X(b)db = \int_0^1 b^{0.5} \cdot \frac{1}{1-0} db = \frac{[b^{1.5}]_0^1}{1.5} \approx 0.667$$

3. נולי מפרפר נחמד פתחה בר, בר-נולי, מול חנות האלקטרוניקה פואסוניק. התוכנית העסקית התבססה על ההנחה שמי שקונה מוצרי אלקטרוניקה נעשה צמא וסביר כי ייכנס לבר לקנות בירה. נולי סימנה באמצעות המשתנה המקרי X את ההסתברות שאדם שחולף על פני פואסוניק יתעלם, ייכנס או אף יקנה מוצר אלקטרוניקה, ובאמצעות Y את ההסתברות שאותו אדם יתעלם, ייכנס או אף יקנה משקה בבר-נולי:

| | |
|---|---|
| מתעלם מהבר | $Y = 0$ |
| נכנס בלא לקנות | $Y = 1$ |
| נכנס וקונה משקה | $Y = 2$ |

| | |
|---|---|
| מתעלם מהחנות | $X = 0$ |
| נכנס בלא לקנות | $X = 1$ |
| נכנס וקונה מוצר אלקטרוני | $X = 2$ |

נולי מצאה כי טבלת ההסתברויות היא:

| | $X = 0$ | $X = 1$ | $X = 2$ |
|---|---|---|---|
| $Y = 0$ | 0.52 | 0.08 | 0.002 |
| $Y = 1$ | 0.022 | 0.36 | 0.004 |
| $Y = 2$ | 0 | 0.002 | 0.01 |

א. מהי ההסתברות שאדם מסוים יקנה משקה בבר?

ב. כמה משקאות נמכרים ביום ממוצע אם בכל יום חולפים 1,000 אנשים ברחוב של בר-נולי?

ג. גאוס קנה מכשיר למדידת רעשים בפואסוניק. מה ההסתברות שיקנה בירה בבר-נולי?

ד. מהי השונות המשותפת של $X$ ו-$Y$? ומה ניתן ללמוד ממנה על התוכנית העסקית של נולי?

$$P(Y = 2) = \sum_{x=0}^{2} P_{XY}(x, 2) = P_{XY}(0,2) + P_{XY}(1,2) + P_{XY}(2,2) = 0 + 0.002 + 0.01 = 0.012$$

$$E[Daily|1000goby] = 1000 \cdot P(Y = 2) = 1000 \cdot 0.012 = 12$$

$$P(Y = 2|X = 1) = \frac{P_{XY}(1,2)}{P_X(1)} = \frac{0.002}{0.08 + 0.36 + 0.002} = \frac{0.002}{0.442} \approx 0.0045$$

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \ldots$$

4. עשרה מנויי פייסבוק נבחרו באקראי (באופן בלתי תלוי). נתגלה כי לאחד מהם 11 חברים, ואילו לכל התשעה האחרים רק חבר אחד.

א. נניח כי כמות החברים $X$ של אדם אקראי נגזרת מהתפלגות פואסון, דהיינו $X \sim P(\lambda)$. העריכו את $\lambda$.

ב. אם אכן הנחה א' נכונה – מה ההסתברות למדידה שהתקבלה (11 חברים לאחד וחבר בודד ליתר התשעה)?

ג. מתברר כי בדיוק בחצי מהרשתות החברתיות כמות החברים $X$ נגזרת מפואסון, דהיינו $X \sim P(\lambda)$, ואילו בחצי השני כמות החברים נגזרת מתוך התפלגות אחידה $X \sim U(0{,}10)$. מהי כעת ההסתברות למדידה שהתקבלה?

ד. בהינתן המדידה שנעשתה – מה ההסתברות שאכן $X \sim P(\lambda)$?

פתרון:

א. הראינו בכיתה שהאומד הכי טוב עבור התוחלת הוא הממוצע (למעשה אני מניח שגם בלי ללמוד הסתברות יכולתם לנחש את זה). כיוון שבהתפלגות פואסון הפרמטר $\lambda$ מייצג את התוחלת הרי שנוכל להעריך אותו על ידי הממוצע:

$$\lambda \approx \frac{1}{10}(11+1+1+\cdots) = 2$$

ב. כיוון שהמנויים נבחרו באופן בלתי תלוי, ההסתברות לבחירת הרצף $(1,1,\ldots,11)$ היא מכפלת ההסתברויות, כאשר ההסתברות לכל אינדיבידואל נגזרת מנוסחת התפלגות פואסון:

$$P\left(\vec{X} = (1,1,\ldots,11)\right) = P(X=1) \times P(X=1) \times \cdots \times P(X=11) = \left(P(X=1)\right)^9 P(X=11)$$

כעת נותר רק להציב:

$$P\left(\vec{X} = (1,1,\ldots,11)\right) = \left(e^{-2} \times \frac{2^1}{1!}\right)^9 \left(e^{-2} \times \frac{2^{11}}{11!}\right) = 5.4 \times 10^{-11}$$

ג. נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11)\right) = P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11) \mid X \sim P(\lambda=2)\right) P\left(X \sim P(\lambda=2)\right)$$
$$+ P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11) \mid X \sim U(0{,}11)\right) P\left(X \sim U(0{,}11)\right)$$

כעת נציב את הידוע לנו:

$$P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11) \mid X \sim P(\lambda=2)\right) = 5.4 \times 10^{-11}$$

$$P\left(X \sim P(\lambda=2)\right) = P\left(X \sim U(0{,}11)\right) = \frac{1}{2}$$

ואת האיבר שנותר מחשבים, כמו קודם כמפלת הסתברויות:

$$P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11) \mid X \sim U(0{,}11)\right) = \left(\frac{1}{12}\right)^{10} = 1.62 \times 10^{-11}$$

מציבים בנוסחת ההסתברות השלמה ומקבלים: $P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11)\right) = 3.5 \times 10^{-11}$

ד. הסעיף הזה נוגע בשאלה שבמדע אנו כל הזמן שואלים: מה ההסתברות שהתיאוריה שלנו נכונה - במקרה זה, שכמות החברים נגזרת מהתפלגות פואסון, בהינתן הממצאים האמפיריים, דהיינו ש- $\vec{X} = (1,\ldots,11)$. כעת אנחנו יודעים כבר את $P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11) \mid X \sim P(\lambda=2)\right)$, ולכן על פי נוסחת בייס נוכל לרשום:

$$P\left(X \sim P(\lambda=2) \middle| \vec{X} = (1,\ldots,11)\right) = \frac{P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11) \middle| X \sim P(\lambda=2)\right) \times P\left(X \sim P(\lambda=2)\right)}{P\left(\vec{X} = (1,\ldots,11)\right)}$$

הן את המונה והן את המכנה כבר חישבנו בסעיפים ב' וג' – לפיכך נקבל ש:

$$P\left(X \sim P(\lambda=2) \middle| \vec{X} = (1,\ldots,11)\right) = \frac{5.4 \times 10^{-11} \times 0.5}{3.5 \times 10^{-11}} = 0.77$$

שימו לב שלמרות שהממצא האמפירי קורה בסבירות נמוכה מאוד, התיאוריה, שההתפלגות הפואסונית, היא דווקא סבירה.

**שאלת בונוס – לא חובה (בונוס 10 נקודות)**

5. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף $X$ נתונה כ- $F_X(t) = Ct^{-\gamma}$ כאשר $\gamma > 2$ ו- $t \geq 1$ (עבור $t < 1$ הצפיפות היא $F_X(t) = 0$).
   א. מצאו את הקבוע $C$.
   ב. מהי התוחלת $E(X)$?
   ג. מודדים את $X$ שוב ושוב $N$ פעמים. מה ההסתברות שלפחות פעם אחת התקבל $X > N$?

שימו לב יש תיקון לשאלה הכוונה לצפיפות f קטן..

$$f_X(t) = Ct^{-\gamma}$$

$$\int_1^\infty f_X(t) \cdot dt = 1$$

$$C\int_1^\infty t^{-\gamma} \cdot dt = \frac{C}{-\gamma+1}[t^{-\gamma+1}]_1^\infty = \frac{C}{-\gamma+1}[0-1] = \frac{C}{\gamma-1} = 1$$

$$C = \gamma - 1$$

$$f_X(t) = (\gamma-1) \cdot t^{-\gamma}$$

$$E[X] = \int_1^\infty t \cdot f_X(t) \cdot dt = \int_1^\infty t \cdot (\gamma-1) \cdot t^{-\gamma} \cdot dt = (\gamma-1) \cdot \int_1^\infty t^{-\gamma+1} \cdot dt = \frac{\gamma-1}{-\gamma+2} \cdot [t^{-\gamma+2}]_1^\infty$$

$$= \frac{\gamma-1}{-\gamma+2} \cdot [0-1] = \frac{\gamma-1}{\gamma-2}$$

$$P(X > N) = \int_N^\infty f_X(t) \cdot dt = \frac{\gamma-1}{-\gamma+1}[t^{-\gamma+1}]_N^\infty = \frac{\gamma-1}{-\gamma+1}[0-N^{-\gamma+1}] = \frac{\gamma-1}{\gamma-1} \cdot N^{-\gamma+1} = N^{-\gamma+1} = p$$

$$p = N^{-\gamma+1}$$

$$Y \sim Bin(N,p)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - P_Y(0) = 1 - (1-p)^N$$