נכתב על ידי יהונתן רגב

מבחנים נוספים להתכנסות טורים חיוביים

למה

תהי (a_n) סידרה מונוטונית.

אם קיימת תת סדרה (a_{m_n}) כך ש - $a_{m_n} \to a$ במובן הרחב, אז $a_n \to a$.

הוכחה

נוכיח עבור המקרה שהסדרה עולה (הוכחת המקרה הנותר באופן דומה).

כיוון שהסדרה עולה, $a_n \leq a_{m_n}$ לכל n ($n \leq m_n$). לכן, אם הסדרה a_{m_n} חסומה מלעיל, אז גם הסדרה a_n חסומה מלעיל, ולכן מתכנסת. נאמר $a_n \to b$, לכן $a \leftarrow a_{m_n} \to b$, ולכן $a = b$, אזי: $a_n \to a$. אם a_{m_n} אינה חסומה מלעיל, אז בפרט a_n אינה חסומה מלעיל, ולכן:

$a_{m_n} \to \infty \leftarrow a_n$ (שכן אם קבוצה B אינה חסומה מלעיל, אז כל קבוצה $B \subseteq A$ אינה חסומה מלעיל).

למה (חוק הקיבוץ)

הכנסת סוגריים בטור מתכנס במובן הרחב אינה משנה את סכומו. כלומר: אם $\sum a_n$ מתכנס, אז לכל סדרה $1 = m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ מתקיים:

$$\sum(a_{m_k} + a_{m_k+1} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}) = \sum a_n.$$

אבחנה

הלמה אינה נכונה אם הטור אינו מתכנס.

דוגמה

$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ לא מתכנס. אולם, אם נכניס סוגריים נקבל טור מתכנס: $\big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \cdots$.

הוכחה

נסמן ב - s'_k את הסכום החלקי של k המחוברים הראשונים של הטור השמאלי.

אז: $s := \sum a_n \xleftarrow{k\to\infty} s_{m_{k+1}-1} \overset{\text{קיבוץ בסכום סופי}}{=} s'_k$.

הערה

בטורים <u>חיוביים</u>, לא צריך להניח התכנסות. ז״א, הסכומים בלמה שווים גם כשהסכום הינו ∞, כיוון שכל טור חיובי מתכנס במובן הרחב.

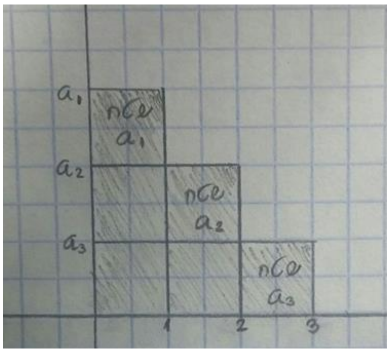
משפט (מבחן העיבוי)

אם הסדרה a_n חיובית <u>ויורדת</u>, אז הטורים $\sum a_n, \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

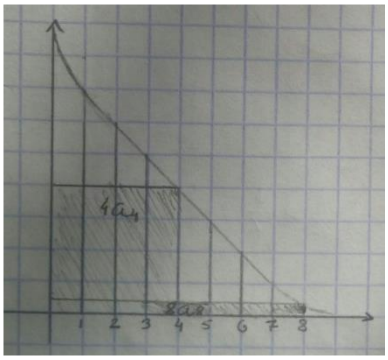
אינטואיציה

ניתן לצייר את איברי הסדרה a_n ב - $\mathbb{R}$.

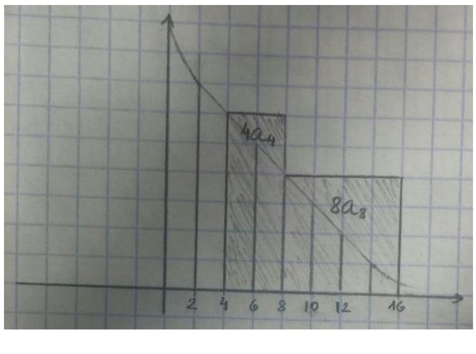
ניתן לצייר את איברי הסדרה a_n גם ב - $\mathbb{R}^2$, כפונקציה מ - $\mathbb{N}$ ל - $\mathbb{R}$.



$\sum a_n$ הינו השטח מתחת למדרגות בציור.



לכן $\sum (2^n \cdot a_{2^n}) \leq \sum a_n$



לכן $\sum a_n \leq \sum (2^n \cdot a_{2^n})$ (ע״י מחיקת מספר סופי של איברים).

הוכחה

נתבונן בטור המתקבל מהטור $\sum a_n$ ע"י החלפת a_n ב - a_{2^k} לכל $n = 2^{k-1}, \cdots, 2^k - 1$.

נסמן את הסכומים החלקיים המקוריים ב - s_n, והחדשים ב - s'_n. מתקיים:

$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq_{\text{הסדרה יורדת}} a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots$.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \leq_{\text{למה קודמת}} a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots$.

לכן, אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, גם הטור:

$a_1 + 2 \cdot a_4 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots) = \frac{1}{2} \cdot \sum(2^n \cdot a_{2^n})$ מתכנס, ועפ"י משפט גם $\sum(2^n \cdot a_{2^n})$ מתכנס.

מצד שני: $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots = a_1 + \sum(2^n \cdot a_{2^n})$.

לכן, אם $\sum(2^n \cdot a_{2^n})$ מתכנס, אז גם הטור $a_1 + \sum(2^n \cdot a_{2^n})$ מתכנס (הוספנו לטור איבר אחד: a_1).

ממבחן ההשוואה, גם הטור $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$ מתכנס, וכיוון שהכנסת סוגריים בטור חיובי לא משנה את סכומו, גם הטור בלי הסוגריים:

$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ מתכנס.

■

דוגמה

$$1 < \alpha \Leftrightarrow \sum \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) < \infty$$

הוכחה

מספיק לבחון את הטור $\sum(2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha})$.

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{2^n}{2^{\alpha \cdot n}} = 2^{n - \alpha \cdot n} = 2^{(1-\alpha) \cdot n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

לכן, אם הטור מתכנס אז $1 < \alpha$.

הכיוון ההפוך: נניח $\alpha > 1$. $\sum(2^n \cdot \frac{1}{(2^{n^\alpha})}) = \sum((2^{1-\alpha})^n)$

ולפי ההנחה הטור מתכנס.

למה

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

הוכחה

$1 \le n$, לכן $1 \le \sqrt[n]{n}$.

נראה באינדוקציה על $n = \{3,4,5,\cdots\}$, שמהאיבר השלישי ואילך, הסדרה יורדת.

<u>בסיס</u>: $n = 3$. מתקיים: $4^{\frac{1}{4}} > 3^{\frac{1}{3}}$, $3^4 > 4^3$, ולכן הטענה נכונה עבור $n = 3$.

<u>צעד</u>: נניח נכונות הטענה עבור $n-1$ ונוכיח נכונות הטענה עבור n.

כלומר, נניח: $(n-1)^{\frac{1}{n-1}} \ge n^{\frac{1}{n}}$.

נעלה את הנתון בחזקת $n \cdot (n-1)$, ונקבל: $(n-1)^n \ge n^{n-1}$.

נכפיל את שני אגפי אי השוויון ב - $(n+1)^n$, ונקבל:

$$n^{2\cdot n} = (n^2)^n \ge \left((n-1)\cdot(n+1)\right)^n \ge (n+1)^n \cdot n^{n-1}.$$

לכן: $n^{n+1} \ge (n+1)^n$.

ומכאן: $n^{\frac{1}{n}} \ge (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$.

הסדרה יורדת לבסוף וחסומה מלרע ע"י 1, לכן קיים b ממשי כך ש- $n^{\frac{1}{n}} \to b \ge 1$.

לכן: $n^{\frac{2}{n}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2 \to b^2$.

נקבל ש - $(2\cdot n)^{\frac{1}{n}}$ ת"ס של $n^{\frac{2}{n}}$, ולכן: $2^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}} = (2\cdot n)^{\frac{1}{n}} \to b^2$.

לכן: $1 \le b = b^2$, ולכן: $b = 1$.

■

מלמה זו, נקבל שמבחן השורש, ולכן גם מבחן המנה, אינו עוזר במקרה של הטור $\sum\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}} \to 1^{-\alpha} = 1$$

ולכן לא ניתן לומר דבר על התכנסות הטור בעזרת מבחן זה.

הערה

השתמשנו בתכונה בסיסית של העלאה בחזקה: אם α ממשי, ו $a_n \to a$ (ו-a_n^α, a^α מוגדרים) אז $a_n^\alpha \to a^\alpha$

.