תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים

214-89 סמסטר א' תשע"ח

1. תהינה $H,K \le G$ שתי תתי חבורות של חבורה G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

   א. $H \cup K$ היא תת חבורה של G.
   ב. $H \cap K$ היא תת חבורה של G.
   ג. $HK = \{hk / h \in H, k \in K\}$ היא תת חבורה של G.

2. קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם התת קבוצות הבאות הן תת חבורות של החבורות הנתונות או לא:

   א. $O_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid A^t = A^{-1}\} \subseteq GL_n(F)$ המטריצות האורתוגונאליות.
   ב. $\{A \in M_n(F) \mid \det A = 0\} \subseteq (M_n(F),+)$ ($M_n(F)$ מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$ עם פעולת החיבור).

3. בכל אחד מהסעיפים נתונה חבורה, קבע מהו הסדר של כל איבר בחבורה:

   א.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in Z_3 \right\}$$

   זאת חבורה ביחס לפעולה של כפל מטריצות (מומלץ לבדוק) .

   ב. $Z_3 \times Z_3 \times Z_3$ עם פעולת החיבור.

4. אילו מתת- החבורות הציקליות הבאות הן סופיות (במקרה זה מצאו את מספר האיברים (ואילו מהן אינסופיות:

   א. $\langle a = 1+i \rangle$ ב- $(C^*,\cdot)$.
   ב. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ב- $(GL_2(R),\cdot)$.

5. אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

   א. $Z_{10} \times Z_{15}$.
   ב. $Z_5 \times Z_2$.