

מבני נתונים ואלגוריתמים – תרגיל 1

שאלה 1

דרגו את הפונקציות הבאות לפי קצב הגידול שלהן. הוכיחו את קביעתכם.

1. $(n - \sqrt{n} \ln n)\sqrt{n}$

2. $e^{(\ln \ln n)^2}$

3. $123n^2 + 456n + 789$

4. $(\ln n)^5$

5. $(\ln n)^{\ln n}$

6. $\sqrt[n]{11n^3 + 4n^4}$

שאלה 2

תהינה $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. הוכיחו $\alpha f(n) + \beta g(n) = \Theta(f(n) + g(n))$.

שאלה 3

תהי $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- א. נניח ש-עולה. הוכיחו $f(1) + \dots + f(n) \leq \int_0^n f(x) dx \leq f(1) + \dots + f(n)$. [רמז: התבוננו בפונקציות $f(\lfloor x \rfloor), f(\lceil x \rceil)$].
- ב. בהנחות של סעיף א, הוכיחו כי $f(1) + \dots + f(n) = \Theta\left(\int_0^n f(x) dx + f(n)\right)$.
- ג. הוכיחו כי כאשר f מונוטונית יורדת מתקיים $f(1) + \dots + f(n) = \Theta\left(\int_0^n f(x) dx + f(1)\right)$.
- ד. מצאו בעזרת הסעיפים הקודמים או בכל דרך אחרת פונקציה מפורשת (ללא סכום או אינטגרל) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(n) = \Theta(\ln 1 + 2 \ln 2 + \dots + n \ln n)$.

שאלה 4

מצאו ביטוי מפורש (ללא סכום) לסיבוכיות של נוסחאות הנסיגה הבאות:

1. $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n$

2. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

3. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

שאלה 5

מצאו אלגוריתם שמקבל כקלט מספרים שלמים a, n ומחזיר את a^n . על האלגוריתם לעבוד ב- $O(\lg n)$ פעולות [הראו זאת]. מה סיבוכיות הזיכרון של האלגוריתם?

שאלה 6

נתון האלגוריתם הבא המקבל כקלט מספר n :

```
void Algo(int n):  
  A = int array of size n  
  for i = 2 to n-1:  
    A[i] = 0  
  end for  
  for i = 2 to n-1:  
    j = 2 * i  
    while j < n:  
      A[j] = 1  
      j = j + i  
    end while  
  end for  
  for i = 2 to n-1:  
    if A[i] == 0:  
      print i  
    end if  
  end for
```

1. מה עושה האלגוריתם?
2. מה סיבוכיות הזיכרון שלו?
3. מה סיבוכיות הזמן שלו?
4. *מצאו אלגוריתם מהיר יותר אסימפטוטית שמבצע אותו דבר. הוכיחו כי הוא מהיר יותר אסימפטוטית.