שאלה 3

א) יהי b מספר ממשי. הגדר את המונח

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

ב) הוכח או הפרך ע"י דוגמה נגדית את הטע-
נה: אם f היא מחזורית שמוגדרת בתחום
(a,∞) והגבול $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ קיים וממשי
אזי קיים מספר ממשי חיובי a כך ש f
קבועה בתחום (a,∞)

$\boxed{f(x+c)=f(x)}$

פתרון:

נניח: $L=\lim f(x)$

נניח בשלילה ש- f לא קבועה, אז יש x_0
כך ש $f(x_0)=t$ כאשר $t\neq L$

נבחר $\varepsilon=|t-L|$ אזי M כך שלכל $x>M$

אז $|f(x)-L|<\varepsilon$ כי

$$f(x_0+cn)=f(x_0)=t$$

$$|f(x_0+cn)-L|=|t-L|=\varepsilon$$

כאשר $x_0+cn>M$ ד"מ לפי ארכי
הארכימדיות.

שאלה - 4

א) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המושג
"הפונק' f רציפה במ"ש ב-A".

ב) תהי $f(x)$ רציפה במ"ש ב $(0,\infty)$
המקיימת $f(x)>1$ לכל $x\in(0,\infty)$
הוכח ש $\sqrt{f(x)}$ רציפה
במ"ש בתחום $(0,\infty)$.

פתרון:

$f(x)$ רציפה במ"ש

$\sqrt{f(x)}$ רציפה במ"ש

יהי $\varepsilon>0$.

צ"ל שיש $\delta>0$ כך שלכל $x_1>x_2>0$
המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים

$$\left|\sqrt{f(x_1)}-\sqrt{f(x_2)}\right|<\varepsilon$$

נכפיל ונחלק בצמוד: $\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}$

וצ"ל:

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}\right| < \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{2}$$

f רציפה במ"ש לכן יש $\delta>0$ כך שלכל
$x_1>x_2>0$: אם $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים
$|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$

מש"ל.

שאלה 5

(א-) $a>0$ מספר ממשי (קבוע)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{x^2+4x} & x<0\\[2mm] x^a+\dfrac{1}{a} & x\geq 0\end{cases}$$

קבע עבור אילו ערכי $a>0$, f רציפה בתחום $(-4,\infty)$.

תשובה:

קל לראות ש- f רציפה ב $-4<x<0$ וגם ב $0<x<\infty$ לכל a.

(נבדוק ב $x=0$:)

(שים לב ש- f מוגדרת ב $x=0$! $f(0)=\frac{1}{a}$

(נבדוק עבור אילו a מתקיים:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^a+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x^2+4x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x(x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{e^{ax}-1}{ax}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{a}{x+4}}_{\frac{a}{4}}=\frac{a}{4}$$

$\Downarrow$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{a}\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

אבל $a>0$ ולכן רק

$$\boxed{a=2}$$

5

מבחן 2017 מועד א'

שאלה 1

א- יהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכח שהטענות הבאות שקולות:

1) הסדרה (a_n) מתכנסת

2) לכל f חח"ע ועל $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הסדרה $(a_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

פתרון: נניח ש: $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא חח"ע ועל אזי היא חייבת להיות תמורה.

$\Leftarrow$ נניח (a_n) מתכנסת לגבול L
נראה ש $(a_{\sigma(n)})$ מתכנסת.

$$|a_n-L|<\varepsilon$$

כלומר יש מספר סופי של איברים שנמצאים מחוץ לסביבת ε של L
נסמן אותם $a_1,..,a_N$.

לכן ניתן לבחור $n_0=\max\{\sigma(1),..,\sigma(N)\}$
כך שהחל מ- n_0 כל יתקיים:

$$|a_{\sigma(n)}-L|<\varepsilon$$

לכן $a_{\sigma(n)}$ מתכנסת ל- L עבור אותו ε.

6

שאלה 2

קבע אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי
או מתבדרים

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\ln(n+1)}$

פתרון

$0 \leq \left|\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)\right| \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\ln(n+1)}\right| = \sum_{\substack{n=1 \\ n/6=3}}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\ln(n+1)}\right|}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\ln(n+1)}\right| \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{n=1 \\ n/6\neq 3}}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n+1)} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ n/6\neq 3}}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n)} \Rightarrow$$ לא מתכנס בהחלט

$\frac{1}{\ln(n+1)} \to 0$ באופן מונוטוני

$\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)$ חסום לפי ד' ריכלה-
הטור מתכנס בתנאי.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}$

$$\frac{|\sin(n^2)|}{n^{5/4}} \leq \underbrace{\frac{1}{n^{5/4}}}_{\text{מתכנס}}$$

ג)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

$$\frac{3^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^3}\cdot\frac{(n!)^3}{3^{n^2}}=\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}\to\infty$$

לכן מתכנס בהחלט.

החל ממקום מסוים

ולכן $|a_n|\not\to 0$ ולכן $a_n\not\to 0$

ולכן הטור מתבדר.

<u>שאלה 3</u>

הוכחה בעזרת $\delta-\varepsilon$, כמו בהרצ'

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$$

<u>הוכחה:</u> לכל $\varepsilon>0$, נחפש $\delta>0$ כך שמתקיים

$$|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

$$|x-1|=|\sqrt{x}-1|\cdot|\sqrt{x}+1|<\delta \Leftarrow \delta>|1-x| \quad |\sqrt{x}-1|<\frac{\delta}{|\sqrt{x}+1|}$$

$$\left|\frac{2\sqrt{x}-2-x+1}{2(x-1)}\right|=\left|\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2(x-1)}\right|=\left|\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right|=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}\right|<\frac{\delta}{2(\sqrt{x}+1)^2}<\frac{\delta}{2}<\varepsilon$$

לכן $\delta=2\varepsilon$.

שאלה 4

י-ל: f מוגדרת ב-$\mathbb{R}$ (נתון)

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

$$\forall a,b\in\mathbb{R}$$

f רציפה ב-0.

הוכח:

א. $f(0)=0$

פתרון: $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$

$$\Downarrow$$

$$f(0)=0$$

ב. f רציפה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון:

$$\lim_{x\to c} f(x) \overset{?}{=} f(c)$$

$$\lim_{x\to c} f(x)-f(c)=\lim_{x\to c} f(x-c)=0$$

$x-c\to 0$, f רציפה

לכן $f(x-c)\to f(0)=0$

לכן $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

ג. f רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

פתרון: יהי $\varepsilon>0$, נמצא $\delta>0$ כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$

אז $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1-x_2)|\overset{?}{<}\varepsilon$$

f רציפה ב-0 לכן יש $\delta>0$ רק מספיק

$|x-0|<\delta$ אז $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$

נסמן $x=x_1-x_2$ אז אם $|x|<\delta$

אז $|f(x)|<\varepsilon$, כלומר $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

מש"ל.

<u>שאלה 5</u>

הוכחה של משפט ידוע.

<u>מבחן 2017 מועד ב'</u>

<u>שאלה 1</u>

סעיף- א---ב-ג.

<u>שאלה 2</u>

תהי a_n מד"א $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot a_{n+1}=1$

הוכח שאם גבול חלקי $a\neq 0$

של a_n אז $\frac{1}{a}$ הוא גבול חלקי שלה.

<u>פתרון:</u>

יהי a גבול חלקי של $\{a_n\}$ כלומר יש ת"ס

$\{a_{n_k}\}$ כך ש $\{a_{n_k}\}\to a$

אז

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}\cdot a_{n_k+1}=1$$

$a\neq 0$ ולכן $\{\frac{1}{a_{n_k}}\}\to\frac{1}{a}$, כלומר

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}a_{n_k+1}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}}=\frac{1}{a}$$

כלומר $\lim a_{n_k+1}=\frac{1}{a}$

כלומר $\frac{1}{a}$ הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$

שאלה 3:

האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan(n)}{n}$$

פתרון:

התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{n} \Rightarrow \text{מתבדר}$$

לפי השוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

התכנסות בתנאי:

נוכיח $\frac{\arctan(n)}{n}$. נבדוק האם הוא מונוטוני. (ידוע שזה סדרה ע"י פונקציה רציפה בתחום $[1,\infty)$:

$$f(x)=\frac{\arctan(x)}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x-\arctan(x)}{x^2}$$

$\frac{x}{1+x^2}$ מונוטוני יורד ולכן מקבלת את המקסימום שלה ב $x=1$ ולכן $f(1)=\frac{1}{2}$

$\arctan(x)$ מונוטוני עולה ולכן מקבלת את המינימום שלה ב $x=1$ ולכן
$\arctan(1)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow f'(x)<0$

ולכן f יורדת $\Leftarrow \frac{\arctan(n)}{n}$ יורדת

(11)

לכן לפי לייבניץ, הטור מתכנס בתנאי

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n)}{n^2}$$

<u>פתרון:</u>

התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{n^2}$$

נשווה עם $\sum \frac{1}{n^2}$ ונקבל

$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

לכן הטור מתכנס בהחלט

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}$$

<u>פתרון:</u>

התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot n!}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1$$

לכן הטור מתכנס בהחלט.