פתרון לתרגיל 9 [redacted] באינפי 2

שאלה 1

סעיף א

קל לבדוק ש $\ln(1+x) \le x$ (לפי הנגזרות $\frac{1}{1+x} \le 1$) בתחום $[0,\infty)$ ולכן

$$\ln(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}) \le \frac{x^2}{n\ln^2 n} \le \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

מתכנס (לפי מבחן העיבוי, או לפי המבחן האינטגרלי לטורים) ולכן טור הפונקציות שלנו מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ווירשטראס.

סעיף ב

ננסה למצוא מקסימום לפונקציה

$$\frac{x^2}{e^{nx}}$$

אם נגזור נקבל

$$\frac{2xe^{nx} - nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}$$

נשווה ל 0 ונסיק ש

$$2x - nx^2 = 0$$

כלומר $x=0$ או $x=\frac{2}{n}$ קל לראות ש $x=\frac{2}{n}$ הוא מקסימום ולכן

$$\frac{x^2}{e^{nx}} \le \frac{4}{n^2e^2}$$

היות והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2e^2}$ מתכנס, טור הפונקציות מתכנס במ"ש לפי מבחן ה M של ווירשטראס.

סעיף ג

נשים לב שאם $x>0$ אז $\frac{1}{1+x^2} < 1$ ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{x}$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית ל $\frac{1}{x}$ כאשר $x > 0$.
כאשר $x = 0$ קל לראות שהטור מתכנס נקודתית ל 0.
ולכן בסה"כ הטור מתכנס נקודתית ל

$$\begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

היות והפונקציות $\frac{x}{(1+x)^n}$ רציפות והן מתכנסות נקודתית לפונקציה לא רציפה, ההתכנסות היא לא במ"ש.

שאלה 2

בחר קטע סגור $[-R, R]$ כך ש $R < 1$. אנחנו יודעים שבקטע זה

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

טור הנגזרות של $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

והוא כמובן מתכנס במ"ש בקטע $[-R, R]$ לפי מבחן ה M של ווירשטראס (כי $nx^{n-1} \leq nR^{n-1}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}$ כמובן מתכנס כי $R < 1$).
לכן לפי משפט גזירה איבר איבר מתקיים ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

שוב טור הנגזרות

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ווירשטראס. ולכן שוב ניתן למוא אותו עם גזירה איבר איבר

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1-2x+x^2+2x-2x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

מכאן קיבלנו ש

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

זה נכון לכל תת קטע $[-R,R]$ של $(-1,1)$ וזה בדיוק אומר שהנוסחא נכונה לכל הקטע $(-1,1)$

שאלה 3

נסתכל על הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)}x^n$$

בתחום $[\frac{1}{6},\frac{5}{6}]$ וננסה למצוא נוסחא לסכומו (מתוך כוונה להציב בו $x=\frac{1}{2}$).
ידוע כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

במידה שווה בתחום המדובר
ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t} = -\ln(1-x)$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = -\ln(1-x)$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

טור הנגזרות הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^{n-1}$$

והוא מתכנס במ"ש בקטע המדובר ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^{n-1} = -(\frac{\ln(1-x)}{x})' = -\frac{-\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} = 2 + 2\ln(\frac{1}{2})$$