אינפי 3 תרגול 13

2 ביוני 2015

החלפת משתנים באינטגרציה:

תהיינה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$g : S \to \mathbb{R}^n$ חח"ע וגזירה ברציפות על S כך ש־$|J_g(t)| \neq 0$ לכל $t \in S$.

אזי, לכל A קומפקטית בעלת נפח $A \subseteq g(S)$ ו־$f : A \to \mathbb{R}^n$ רציפה מתקיים:

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(g(t))|J(t)|dt$$

החלפות משתנים נפוצות ושימושיות:

הקואורדינטות שהן ברירת המחדל שלנו הן הקואורדינטות הקרטזיות.

יש כמה החלפות משתנים חשובות ושימושיות שכדאי לזכור.

1. קואורדינטות קוטביות/פולריות:

החלפת המשתנים היא:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

כאשר: $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$. האינטרוול של θ יכול להיות שונה.

בשביל להפוך קואורדינטות קוטביות לקרטזיות, נבצע:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x>0, y\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi & x>0, y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & x<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0, y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & x=0, y<0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

היעקוביאן שלנו במקרה הזה הוא:

$$\begin{vmatrix} (r\cos\theta)_r & (r\cos\theta)_\theta \\ (r\sin\theta)_r & (r\sin\theta)_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

2. קואורדינטות גליליות:

כדי להביע נקודה במרחב בעזרת גליל, אנו צריכים שלושה דברים; את הגובה, את הרדיוס של מעגל הבסיס ואת הזווית במעגל הבסיס (אזימוט).

שינוי המשתנים הוא:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

כאשר $(r,\theta,z)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}$.

אם נרצה להפוך קואורדינטות גליליות לקואורדינטות קרטזיות, נהפוך את r,θ כמו בקואורדינטות קוטביות.

היעקוביאן במקרה זה הוא: $|J|=r$.

3. קואורדינטות כדוריות:

כדי להציג נקודה במרחב בעזרת כדור, אנו זקוקים לשלושה דברים; מרחקה מהראשית, הזווית שלה ביחס לאחד מהצירים (במקרה שלנו, z) ואת הזווית היחס למעגל הגדול במרכז הכדור (אזימוט).

שינוי המשתנים הוא:

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi$$

$$z=r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\phi)\in[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$.

אם נרצה להביע קואורדינטות כדוריות בעזרת קואורדינטות קרטזיות, השינוי הוא:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J|=r^2\sin\theta$.

יש עוד סוגי קואורדינטות נפוצים (קואורדינטות פרבוליות, למשל). עם כל זאת, בשורה התחתונה מדובר על החלפת משתנים כמו בדומה לאינטגרלים במשתנה אחד, וכל אנחנו שומרים על תנאי המשפט אנחנו יכולים לשנות את המתשנים ככל העולה על רוחנו.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\int\int_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

כאשר:

$$D = \{x^2+y^2 \le 1\}$$

<u>פתרון:</u>

די מתבקש לעבור לקואורדינטות קוטביות.

אם כן, התחום שלנו הוא:

$$D = \{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \le 1\} = \{r \le 1\}$$

ובכל אופן $0 \le r$ ולכן $0 \le r \le 1$.

אם כן,

$$\iint_D = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sin(\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}) r d\theta dr$$

ה־r נכנס שם כי זהו היעקוביאן. נחשב את האינטגרל:

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r\sin r d\theta dr = 2\pi \int\limits_0^1 r\sin r dr$$

ואחרי אינטגרציה בחלקים נקבל:

$$= 2\pi \sin 1$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint_D (x+y+z)dxdydz$$

כאשר:

$$D = \{(x,y,z) | \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2-z^2}\}$$

פתרון:

x לא משחק את המשחק של z, y עם חזקת 2 ולכן נראה שכדאי לעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = x$$

$$y = r\cos\theta$$

$$z = r\sin\theta$$

ואם כן התחום הוא:

$$r \leq x \leq \sqrt{4-r^2}$$

לגבי r עצמו נקבל מהתחום של x שמתקיים: $r \leq \sqrt{4-r^2}$ ולכן $r \leq \sqrt{2}$.

r תמיד אי שלילי ולכן סה"כ $0 \le r \le \sqrt{2}$.

θ נמצאת בין 0 לבין 2π. אם כן:

$$\iiint\limits_D = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} \int\limits_0^{2\pi} (x + r\cos\theta + r\sin\theta) \cdot r d\theta dx dr$$

r שצץ שם הוא היעקוביאן. נחשב את האינטגרל:

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} (rx\theta + r\sin\theta - r\cos\theta)|_0^{2\pi} dx dr = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} rx dx dr =$$

$$= \cdots = 2\pi$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_D x dx dy dz$$

כאשר:

$$D = \{(x,y,z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, x \ge 0\}$$

<u>פתרון:</u>

הפונקציה שלנו אי זוגית והתחום סימטרי ולכן האינטגרל הוא 0.

נראה זאת ע"י חישוב.

קודם כל, לשם הנוחות, נבצע החלפת משתנים:

$$u = \frac{x}{a}$$

$$v = \frac{y}{b}$$

$$w = \frac{z}{c}$$

היעקוביאן יהיה:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}$$

נשים לב שגזרנו "הפוך" כלומר: $dxdydz = abcdudvdw$, ולכן:

$$\iiint\limits_{D} = \iiint\limits_{D'} au(abc)dudvdw = a^2bc \iiint\limits_{D'} ududvdw$$

כאשר:

$$D' = \{(u,v,w)|u^2+v^2+w^2 \leq 1, u \geq 0\}$$

כעת מאד מתבקש לעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$u = r\sin\theta\cos\phi$$

$$v = r\sin\theta\sin\phi$$

$$w = r\cos\theta$$

מכיוון שאנו רוצים $u \geq 0$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$.

$r \in [0,1)$, $\phi \in [0,2\pi)$ ואם כן:

$$\iiint\limits_{D'} = a^2bc \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 (r\cos\theta\sin\phi)(r^2 sin\theta)drd\phi d\theta$$

כאשר $r^2\sin\theta$ הוא היעקוביאן שלנו.

כמו שאמרנו, לאחר שנחשב את האינטגרל נקבל 0.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח האליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

<u>פתרון:</u>

שטח של צורה גיאומטרית הוא האינטגרל של 1 על התחום.

כלומר, נחשב את:

$$\iint\limits_D 1dxdy$$

כאשר:

$$D=\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$$

נחליף למעין קואורדינטות קוטביות, תוך התחשבות בכך שלאליפסה מוקדים שונים:

$$x=ar\cos\theta$$

$$y=br\sin\theta$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J|=abr$.

במקרה שלנו, $r\in[0,1]$ ולכן סה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}abrd\theta dr=\pi ab$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_D dxdydz$$

כאשר:

$$D = \{(x,y,z)|1 \leq x^2+y^2 \leq 4-z^2\}$$

<u>פתרון:</u>

יש קצת התלבטות בין קואורדינטות גליליות לכדוריות.

אם נשתמש בגליליות:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

נקבל שהתחום של r הוא :

$$1 \leq r \leq \sqrt{4-z^2}$$

מה שמכריח את z להיות בתחום $0 \leq z \leq \sqrt{3}$ ואם כן האינטגרל שלנו הוא:

$$\iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} \int\limits_0^{2\pi} r d\theta dr dz$$

r שנכנס שם הוא היעקוביאן שלנו. נחשב את האינטגרל:

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2\pi r dr dz = \pi \int_0^{\sqrt{3}} r^2|_1^{\sqrt{4-z^2}} dz = \dots = 2\sqrt{3}\pi$$