תרגיל 5

1. יהא X מ"ט ו A תמ"ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אם קיימת סגורה S' ב X כך ש $S = A \cap S'$.

2. הוכיחו ש־(X, τ_{cof}) תמיד ספרבילית. בנוסף, מצאו מתי (X, τ_{coc}) ספרבילית.

3. תהי $(P, <)$ קבוצה סדורה לינארית עם טופולוגיית הסדר. הוכיחו את משפט הסנדוויץ': אם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P$ סדרות כך ש
$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$$
וגם
$$L := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} z_n$$
אז מתקיים ש־$\lim_{n\in\mathbb{N}} y_n = L$.
<u>בונוס:</u> נסחו טענה דומה על רציפות פונקציות והוכיחו אותה.

4. יהיו (X, d) ו־(Y, ρ) שני מרחבים מטריים ותהיה $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ פונקציה על. נניח גם שקיימים $m < M \in \mathbb{R}^{>0}$ כך ש־
$$\forall x, y \in X : md(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$$
הוכיחו ש־f היא הומאומורפיזם.

5. תהא $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$ טופלוגיה על $\mathbb{R}$. נגדיר $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ שמוגדרת על ידי $f(x) = 2x$. מצאו באלו נקודות f רציפה.

6. מצאו τ על $\mathbb{R}$ כך שחיבור של רציפות $f, g : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ אינה רציפה.

7. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A \subseteq X$. נגדיר את $1_A : X \to \{0, 1\}$ לפי
$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(א) הוכיחו ש־$X \setminus \partial(A) = int(A) \cup int(A^c)$

(ב) הוכיחו ש־1_A רציפה בדיוק ב־$X \setminus \partial(A)$

(ג) הסיקו ש־1_A רציפה אם ורק אם A היא סגוחה.

8. נניח ש־$(P,<),(Q,\prec)$ הן קבוצה סדורה לינארית ונסתכל על טופולוגיית הסדר. נניח בנוסף ש־$f: P \to Q$ הינה פונקציה מונוטונית.

(א) הוכיחו או הפריכו שקבוצת נקודות אי הרציפות של f היא דלילה.

(ב) האם תשובתכם תשתנה אם $(Q,\prec) = ([0,1],<)$?

9. יהיו X ו־Y מרחבים טופולוגיים ויהיו $\{C_i\}_{i=1}^n$ כיסוי סגור של X. נניח בנוסף ש־$f_i : C_i \to Y$ פונקציה רציפה יחסית לטופולוגיית תת המרחב. נניח לבסוף שהפונקציות קוהרנטיות, כלומר שלכל $1 \le i \neq j \le n$ ו־$x \in C_i \cap C_j$ מתקיים $f_i(x) = f_j(x)$.
הוכיחו שהפונקציה $f: X \to Y$ שמוגדרת ע"י

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in C_n \end{cases}$$

היא רציפה (אין צורך להראות שהיא מוגדרת היטב). הראו גם שאם C_i לא סגורות אז הטענה לא נכונה.
הערה: הטענה נכונה גם כשמדובר על קבוצות פתוחות.
הערה 2: זוכרים את פונקציית קולץ מהתרגול השני? הפונקציה $f : (\mathbb{Z}, d_2) \to (\mathbb{Z}, d_2)$ שמוגדרת ע"י:

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in 2\mathbb{Z} \\ 3n+1 & n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

עכשיו ברור שהיא רציפה.

10. קבעו אם הקבוצות הבאות צפופות וגם אם הן דלילות

(א) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

(ב) $A := \left\{ f \in C[0,1] \mid \exists \alpha > 0 \; \forall\, 0 \le x \le \alpha : f(x) = 0 \right\} \subseteq C[0,1]$ עם מטריקת d_1, כלומר קבוצת כל הפונקציות הרציפות שמתאפסות בסביבה של 0.

(ג) $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (כלומר קבוצת המטריצות ההפיכות)

(ד) $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$, כלומר קבוצת המטריצות עם דטרמיננטה 1.

(ה) $5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה־3־אדית

(ו) אתגרים

i. $\left\{\frac{a^n}{b^m} \mid n,m\in\mathbb{Z}\right\}\subseteq\mathbb{R}^{>0}$ עבור $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

א'. רמז: משפט לינדמן־ויירשטראס

ב'. רמז 2: משפט קרונקר

ii. $\mathbb{P}:=\{q\in\mathbb{Z}\mid \text{q is prime}\}\subseteq\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה־p־אדית.

א'. רמז: משפט דריכלה

11. השלימו את הטבלה הבאה:

מרחב טופולוגי	ספרבילי
המרחב הדיסקרטי	
הטופולוגיה הטריוויאלית	
$\mathbb{R}^n$	
$[0,1]$	
$(\mathbb{Z},d_p)$	
$(\mathbb{Q},d_p)$	
$(\overline{\mathbb{Z}},d_p)$	
$(\overline{\mathbb{Q}},d_p)$	
l_1	
l_2	
l_∞	
$(C[0,1],d_\infty)$	
$(C[0,1],d_1)$	
$(\{a,b\},\tau_{\text{Sierpiński}})$	
(X,τ_{cof}) עבור X אין סופי	
(X,τ_{coc}) עבור X לא בן מניה	
$([0,1]^2,<_{lex},\tau_{<_{lex}})$	