4.3.19

מספרים תרגיל 4

פונקציות הרמוניות:

הגדרה: פונקציה $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הרמונית ב-D אם

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0 \text{ ב-D}$$

$\Delta u \, (\nabla^2 u)$ נקרא "משוואת לפלס" של u.

הגדרה: תהי $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הרמונית ב-D.

אז $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית צמודה ל-u ב-D.

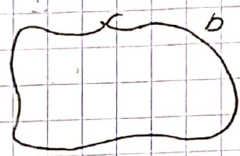
אם V הרמונית ומקיימת יחד עם u את משוואות קושי רימן ב-D.

משפט: $f=u+iv$ אנליטית ב-D

$\Updownarrow$

u,v הן פונקציות הרמוניות צמודות ב-D.

משפט: בתחום פשוט קשר לכל פונקציה u ב-D קיימת פונקציה הרמונית צמודה.



אופרטור גזירה:

תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ כך ש-(u,v) גזירות ברציפות. נגדיר את האופרטורים: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

תכונות:

1. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}$ מוגדרים תמיד כש-u,v גזירות ברציפות, אבל "יתכן" ש-u,v גזירות ברציפות ו-f' לא קיימת.
2. אם f גזירה ב-z_0 אז $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$
3. f מקיימת את משוואות קושי רימן $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

תרגיל:

האם קיימת פונקציה f אנליטית כך ש-$Re(f)=x^2y$?

פתרון:

נבדוק את "משוואת לפלס" של $Re(f)=u$

$$u=x^2y \Rightarrow u_x=2xy \Rightarrow u_{xx}=2y$$

$$\Rightarrow u_y=x^2 \Rightarrow u_{yy}=0$$

12.3.19

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=2y\neq 0$$

u לא הרמונית ולכן לא קיימת f כזו.

תרגיל:

מצאו פונק' אנליטית f כך ש- $Re(f)=x^3-3xy^2$

פתרון:

נמצא v הרמונית צמודה ל-u. (באמצעות משוואות קושי רימן).

$$u=Re(f)=x^3-3xy^2$$

$$\Rightarrow u_x=3x^2-3y^2=v_y$$

$$\circledast\ v(x,y)=\int v_y\,dy=3x^2y-y^3+C(x)$$

$$u_y=-6xy=-v_x$$

$$\circledast\Downarrow$$

$$6xy=6xy+C'(x)$$

$$C(x)=C\ (\text{[illegible]})$$

בסה"כ קיבלנו את הפונק'

$$f(x+iy)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+C)$$

$$=(x+iy)^3+C=z^3+C$$

תרגיל:

הוכיחו ש-f מקיימת משוואות קושי רימן אם"ם $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$

ובמקרה זה מתקיים $f'=\frac{\partial f}{\partial z}$

פתרון:

נחשב $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial}{\partial \bar z}(u+iv)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}(u_x+iu_y+iv_x-v_y)=$$

$$\frac{1}{2}(u_x-v_y)+\frac{i}{2}(u_y+v_x)$$

ולכן.
$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0 \iff \begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$$

נחשב את $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(u+iv)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}(u_x+\underset{u_x}{v_y})+\frac{i}{2}(-\underset{v_x}{u_y}+v_x)$$

$$\overset{\text{[illegible]}}{=}u_x+iv_x=f'$$

12.3.19

תרגיל:

הוכיחו ש- $\frac{\partial}{\partial \bar z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{4}\Delta f$

(נניח ש- u,v גזירות פעמיים ברציפות)

פתרון:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \cancel{i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}} + \cancel{i\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f$$

$$= \frac{1}{4}\Delta f$$

א. תרגיל: נתון ש- u פונק' הרמונית

הוכיחו ש- $f(x+iy) = \frac{\partial}{\partial z}u(x,y) = \frac{1}{2}u_x - \frac{i}{2}u_y$ אנליטית.

פתרון:

u הרמונית, ולכן גזירה ברציפות פעמיים ולכן גם u_x, u_y רציפות.

לכן כדי להראות ש- f אנליטית מספיק להראות קיום משוואות קושי רימן.

לפי תרגיל קודם $\overbrace{\frac{1}{2}u_x}^{u},\ \overbrace{-\frac{1}{2}u_y}^{v}$ מקיימות משוואות ק"ר אמ"מ $\frac{\partial}{\partial \bar z} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial}{\partial z}u\right) = \frac{1}{4}\Delta u = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$\Leftarrow$ $\frac{\partial}{\partial \bar z}=0$ $\frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}u_y$ מקיימות משוואות ק"ר. רציפות, לכן f אנליטית.

ב. תרגיל: $u(x,y)$ הרמונית.

הוכיחו ש- u_x הרמונית. ומצאו פונק' הרמונית צמודה.

פתרון:

f אנליטית ולכן $g = \partial f = u_x - iu_y$ אנליטית.

לכן u_x הרמונית ו- $(-u_y)$ הרמונית צמודה לה.

פונק' אלמנטריות

פונק' האקספוננט:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

פונק' טריגונומטריות:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

17.3.19

רשמו

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\cos z)' = \ldots = -\sin z$$

רשמו חלק ממשי וחלק מדומה של הפונקציה

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos(-x)+i\sin(-x))}{2i} =$$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right)+i\sin x\left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2i}\right) = \underbrace{\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)}_{u}+i\underbrace{\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)}_{v}$$

$w = \ln(z)$

$z = x+iy = re^{i\theta}$

$w = u+iv$

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= e^{u} \\ v &= \theta+2\pi k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v &= \theta+2\pi k \\ u &= \ln r \end{aligned}$$

$$\underset{re^{i\theta}}{\ln z} = \underbrace{\ln r}_{u}+i\underbrace{(\theta+2\pi k)}_{v}$$