<u>אלגברה לינארית למהנדסים - תרגיל בית 6</u>

תאריך הגשה: 15.06.2017

1. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$A=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה סופית של וקטורים מ־V. לגבי כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה. אם כן־ הוכיחו אותה, אם לא־ הפריכו אותה ע"י מתן דוגמה נגדית.

   (א) אם A ת"ל (תלויה ליניארית) אז כל תת־קבוצה $B\subseteq A$ ת"ל.

   (ב) אם A בת"ל אזי כל תת־קבוצה $B\subseteq A$ בת"ל.

   (ג) אם A בת"ל ו־$v\in V$,$v\notin A$ אזי $A\cup\{v\}$ בת"ל.

   (ד) אם A בת"ל ו־$v\in V$,$v\notin Span(A)$ אזי $A\cup\{v\}$ בת"ל.

   (ה) אם A בת"ל ו־$v\in V$,$v\notin Span(A)$ אזי $\{v_1+v,\dots,v_n+v\}$ בת"ל.

   (ו) אם A בת"ל ו־$v\in V$,$v\in Span(A)$ אזי $\{v_1+v,\dots,v_n+v\}$ בת"ל.

   (ז) אם A בת"ל ו־$v\in V$,$v\in Span(A)$ אזי $\{v_1+v,\dots,v_n+v\}$ ת"ל.

   (ח) אם A בת"ל ו־$v,u\in V$ מקיימים $u\in Span(A\cup\{v\})$,$u\notin Span(A)$, אז יש $a\in\mathbb{F}$ כך ש $u=av$.

2. נסתכל על $\mathbb{R}^3$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$. תהא $A=\{(1,3,x),(1,2,2),(x,1,1)\}$ קבוצת וקטורים כש־$x\in\mathbb{R}$.

   (א) מצאו x כך ש־A ת"ל.

   (ב) מצאו x כך ש־A בת"ל.

3. **<u>רשות</u>** על הוקטורים $(1,7)$ ו־$(2,-1)$, ניתן להסתכל מעל הרציונלים ומעל השדות הראשוניים $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (עבור p ראשוני). בכל מקרה מצאו האם הם תלויים ליניארית ומה המרחב הנפרש על ידם.
   רמז: על פניו נראה שיש לבדוק אינסוף מקרים (יש אינסוף שדות לבדוק), אך בפועל תראו שיש רק מספר קטן של שדות יוצאי דופן.

4. תארו את המרחב הנפרש ע"י קבוצות הוקטורים הבאות מעל הממשים ומצאו לו בסיס. (כשהקבוצות מכילות פולינומים, הכוונה היא שהם במרחב $\mathbb{R}[x]$)

   (א) $\{(3,4),(6,7)\}$

   (ב) $\{x^2-x,x^2-1\}$

   (ג) $\{(0,3,3),(4,6,5),(2,0,2)\}$

   (ד) $\{x^4+x^2,x^4+1,x^2+1\}$

5. עבור כל אחד מתת־המרחבים הבאים, מצאו בסיס ואת המימד:

(א) $\operatorname{Span}\left\{(3,4,2,5),(1,2,1,2),(1,0,0,1),(0,6,3,3)\right\}$ (כתת מרחב של $\mathbb{R}^4$)

(ב) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+2x_2+3x_3=0\right\}$

(ג) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0 \; and \; x_1-2x_2+\pi x_3=0\right\}$

(ד) מרחב הפולינומים ממעלה $\leq n$ מעל $\mathbb{R}$ המתאפסים בנקודה $x=-1$

6. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהא $U\subseteq V$ תת־מרחב.

(א) הוכיחו כי $\dim U\leq\dim V$

(ב) הוכיחו כי $\dim U=\dim V$ אם"ם $U=V$

(ג) הוכיחו כי אם F הוא תת־שדה של $\mathbb{C}$ המקיים $\mathbb{R}\subseteq F\subseteq\mathbb{C}$ אז $F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$ (שימו לב שזו אינה טענה טריוויאלית, הרי למשל $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ אבל $\mathbb{Q}\neq\mathbb{R}$ וגם $\mathbb{R}\neq\mathbb{C}$).