

תרגיל 11

1. הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול במונחי δ - ϵ כי מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-3} = -5 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x} = 4 \quad (\text{ב})$$

2. תהי $f(x)$ פונקציה חסומה, ותהי $g(x)$ פונקציה המקיימת

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$$

שימו לב כי זאת טענה שימושית, ולאחר שתוכיחו אותה, תוכלו להשתמש בה בתרגילים הבאים.

3. תזכורת:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

הוכיחו כי:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

רמז: לופיטל.

(ב) לכל $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

4. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \sin x$$

(ג)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x \ln x}$$

(ד)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ה)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

(ו)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+2} \arctan x}{3^x + 4^{x+e}}$$

(ז)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln(x^2)}$$

(ח)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\arcsin x))}{xe^x \cos x}$$

(ט)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

5. תהי

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(א) מצאו את כל הנקודות בהן f רציפה.(ב) מצאו את $f'(x)$ לכל הנקודות בהן f גזירה.(ג) האם $f'(x)$ רציפה בתחום הגדרתה? אם לא, באילו נקודות היא לא רציפה, ומה סוג אי־הרציפות שם (סליקה/קפיצה/מין שני)?

הוכיחו ע"י הגדרת הגבול ע"י מספרים ממשיים (הגדרת ϵ, δ) כי אם $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$ ו-
 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$ אז $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = a + b$
רמז: היעזרו באי-שוויון המשולש $|a + b| \leq |a| + |b|$.