

5. האם הקבוצה  $B = \{1 + x^2 + 2x^3, 5 + x + 6x^2 + 13x^3, -3 - x - 3x^2 - 8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$  תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0; אם לא, הראה שהצ"ל היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

פיתרון:

כפי שראינו בתרגול, שמים את הוקטורים בעמודות מטריצה, ובודקים האם הפיתרון היחיד הוא הטריוויאלי. נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטורים תלויים ליניארית אם ורק אם למטריצה המדורגת יש פיתרון לא טריוויאלי. כאן מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים בת"ל.

הערה: שימו לב שלמערכת יש פיתרון לא טריוויאלי אם ורק אם יש משתנה חופשי. כאן אין משתנה חופשי, ולכן הוקטורים בת"ל.

7. נתבונן ב-  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$   $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$  האם  $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in \text{span}(B)$ ? אם כן, מצאו את הצירוף הליניארי המתאים.

**פיתרון:**

נבדוק האם למערכת

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 39 \\ 4 & 1 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 5 & 23 \end{array} \right)$$

יש פיתרון. נדרג:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 39 \\ 4 & 1 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 5 & 23 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פיתרון והוא הוקטור  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . כלומר:

$$2A_1 - 2A_2 + 3A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in \text{span}(B)$$