

תרגיל בית מספר 5 – ליניארית מדמ"ח

שאלה 1: (חזרה קטנה אחורה, על מנת לחדד סופית את הנקודה)

תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל יהיו $\{v_1, \dots, v_n\}$ ווקטורים ב- V . הוכיחו או הפריכו:

- אם T חח"ע ו- $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל
- אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל
- אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס עבור V ו- $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בסיס עבור W אזי T היא איזומורפיזם.

שאלה 2:

תהינה $T: V \rightarrow W$, $S: W \rightarrow U$ העתקות לינאריות.

- הוכיחו כי $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$
- בניח בנוסף ש- $S \circ T$ היא העתקת האפס. הוכיחו כי $\text{Im}(T) \subseteq \ker(S)$

שאלה 3:

יהי V מ"ו ותהי $T: V \rightarrow V$ הע"ל המקיימת $T^2 = T \circ T = 0$. הוכיחו כי

$$\dim \ker(T) \geq \frac{\dim V}{2}$$

שאלה 4:

יהי V מרחב ווקטורי מעל F ותהי $T: V \rightarrow V$ הע"ל המקיימת $T^3 = 0$. נתון בנוסף שקיים ווקטור $v \in V$ כך ש- $T^2(v) \neq 0$.

- הוכיחו שההעתקה $(I - T)$ היא איזומורפיזם ומצאו את $(I - T)^{-1}$.
- הוכיחו כי הקבוצה $\{v, T(v), T^2(v)\}$ היא בת"ל.

$$1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2) \quad \text{רמז לסעיף א'}$$

שאלה 5:

יהי $V = \{a \cos \theta + b \sin \theta : a, b \in \mathbb{R}\}$ מרחב ווקטורי (שאיבריו הן פונקציות של θ). הוכיחו או הפריכו: $V \cong \mathbb{R}^2$.

(שימו לב שאם בחרתם להוכיח את הטענה, עליכם להציג איזומורפיזם ולהוכיח שהוא אכן איזומורפיזם)

בהצלחה!