

תרגיל 3 - אינפי 3 88-230

1 בדצמבר 2016

הגדרה 1. פונקציה $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ נקראת דיפרנציאבילית ב a אם קיימת העתקה לינארית L_a כך שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$f(a+v) = f(a) + L_a(v) + o(v)$$

ההעתקה L_a נקראת נקראת דיפרנציאל ומסומנת על ידי df_a .

תרגיל 1. תהיינה $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות דיפרנציאביליות ב a . הוכיחו את הטענות הבאות:

$$1. \quad d(f+g)_a = df_a + dg_a$$

$$2. \quad d(f \cdot g)_a = g(a) df_a + f(a) dg_a$$

$$3. \quad \text{אם } g(a) \neq 0 \text{ אזי מתקיים}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a) df_a - f(a) dg_a}{g(a)^2}$$

(רמז: בחלק מהסעיפים אפשר להשתמש בכלל שרשרת).

תרגיל 2. מצאו את המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל (מטריצת יעקובי) של הפונ' הבאות. (בתחום ההגדרה הטבעי שלהן).

$$1. \quad f(x, y, z) = x^y$$

$$2. \quad f(x, y, z) = (x^y, z)$$

$$3. \quad f(x, y) = \sin(x \sin y)$$

$$4. \quad f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$$

$$5. \quad f(x, y, z) = x^{y^z}$$

$$6. \quad f(x, y, z) = x^{y+z}$$

$$7. \quad f(x, y, z) = (x+y)^z$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad .8$$

$$f(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^y) \quad .9$$

תרגיל 3. תהי $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ו $a \in \mathbb{R}$. מצאו עבור אילו נק' הן דיפרנציאביליות ומצאו את המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל באותן הנקודות.

$$.1 \quad f(x, y) = \int_a^{x+y} g(t) dt$$

$$.2 \quad f(x, y) = \int_a^{xy} g(t) dt$$

$$.3 \quad f(x, y, z) = \int_a^{\sin(x \sin(y \sin z))} g(t) dt$$

תרגיל 4. תהי

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

1. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial x}$.

2. האם f דיפרנציאבילית ב $(0, 0, 0)$.

תרגיל 5. תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו שאם מתקיים $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ אזי $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.