נכתב על ידי נועם יערי

	תכונות של פולינומים	תכונות של מספרים שלמים
ראשוניות (אי-פריקות)	P פולינום אי-פריק אם P מתחלק (ללא שארית) לפולינומים קבועים ולעצמו בלבד ז"א אם $P = fg$ נובע ש $\deg g = 0$ או $\deg f = 0$.	$P > 0$ ראשוני אם P מתחלק (ללא שארית) ל - 1 ולעצמו בלבד.
המשפט היסודי של אריתמטיקה (פירוק יחיד)	כל פולינום $f(x)$ ניתן להצגה יחידה $f = p_1p_2 \dots p_s$ כש-p_i פולינומים אי-פריקים.	כל מספר חיובי ניתן להצגה יחידה $n =$ $p_1p_2 \dots p_s$ כש-p_i ראשוניים.
חילוק עם שארית (אלגוריתם אוקלידס)	לכל f, g קיימים פולינומים q, r כך ש - $f = qg + r$ (כש-$\deg r < \deg g$ או $r \equiv 0$) $x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 2$ $= (x^3 - 2x + 1)(x^2 - 1) + (-3x + 3)$	לכל m, n קיימים מספרים q, r כך ש- $m = qn + r$ (ש-$0 < r < n$ או $r = 0$) $5776_{=m} = 2 \cdot 2015_{=n} + 1746_{=r}$
$g.c.d$ $= greatest$ $common$ $divisor$ מ.מ.מ – מחלק משותף מקסימלי	אומרים ש- $d(x) = g.c.d(f(x), (g(x)))$ אם $d\|f$, $d\|g$, d הפולינום המתוקן (המקדם הראשי שווה ל-1) בעל התכונות האלו $g.c.d(x^3 - 1, x^2 - 1) = x - 1$ $g.c.d(x^3 + 1, x^2 + 1) = 1$	אומרים ש$d = g.c.d(a, b)$ אם $d\|a$, $d\|b$ ו-d המספר הגדול ביותר בעל התכונות האלו. $g.c.d(12,30) = 6$ $g.c.d(6,35) = 1$
$l.c.m -$ $lease\ common$ $multiple$	$l.c.m$ מוגדר גם לפולינום באופן דומה. $l.c.m = (x^2 - 1, x^3 - 1) =$ $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$	אומרים ש $m = l.c.m(a, b)$ אם $a\|m$, $b\|m$ ו-m המספר הקטן ביותר בעל התכונות האלו. $l.c.m(12,30) = 60$

ערך פולינום של מטריצה

יהי $f \in F[x]$ פולינום במשתנה אחד מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נגדיר $f(A)$ כמטריצה מגודל $n \times n$; אם $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0$, אזי נגדיר: $f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots a_1 A + a_0 I_n$. דוג': $f(x) = x^2 - 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$f(A) = A^2 - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אומרים ש-$f \in F[x]$ **פולינום מאפס** ל-A אם $f \neq 0$ ו-$f(A) = 0_{matrix}$

משפט

לכל מטריצה A קיים פולינום מאפס.

הוכחה

יהי $V = \{$כל מטריצה מגודל $n \times n$ יחד עם פעולות חיבור וכפל בסקלר$\}$

V מ״ו, $\dim V = n^2$.

נתבונן בקבוצת מטריצות $S = \{A^{n^2}, A^{n^2-1}, \dots, A, I\}$.

$|S| = n^2 + 1 > n^2 = \dim V$, לכן S ת״ל. ז״א קיימים סקלרים $\alpha_{n^2}, \alpha_{n^2-1}, .. \alpha_1, \alpha_0$ (לא כולם אפסים) כך ש- $\alpha_{n^2}A^{n^2} + \alpha_{n^2-1}A^{n^2-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0_{matrix}$ נגדיר $f(x) = \alpha_{n^2}x^{n^2} + \alpha_{n^2-1}x^{n^2-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $f(x) \neq 0$, $f(A) = 0_{matrix}$

משפט (קיילי המילטון)

לכל מטריצה A ריבועית מתקיים $p_A(A) = 0_{matrix}$ (כש- $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A).