# פתרון תרגיל 10 אנליזה הרמונית תש"ף

6 בינואר 2020

1. ראשית, הפונקציה רציפה, הנגזרת רציפה למקוטעין ובקצוות מתקיים: $f(0) = f(2\pi) = \pi^2$, ולכן הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש.
כמו כן, הפונקציה גזירה. לכן, בכל נקודה $x \in (0, 2\pi)$, הטור מתכנס לפונקציה $f$, לפי דיריכלה, ובקצוות:

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = f(0) = f(2\pi)$$

אנו שוב מקבלים שהטור מתכנס לפונקציה, ולכן הטור מתכנס לפונקציה $f$ בכל נקודה.
מפה לשם נשארנו עם ד', אף תשובה לא נכונה.

2. שימו לב שלא צריך לחשב את הטור במפורש, כי אלו לא אינטגרלים שקל לחשב.

(א) בניגוד לשאלה 1 כאן הערכים בקצוות שונים. ולפי דיריכלה, בקצוות נקבל:

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{3\pi}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\pi}$$

ובתוך הקטע נקבל: $S(x) = f(x)$, כלומר:

$$S(x) = \begin{cases} \sqrt{x + \pi} & x \neq 0, 2\pi \\ \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\pi} & x = 0, 2\pi \end{cases}$$

והפונקציה $S$ לא רציפה, לכן ההתכנסות של $S$ אינה במ"ש ולכן גם לא בהחלט.
מצד שני, הטור כן מתכנס נקודתית כמו שראינו (לפי דיריכלה) ולכן התשובה היא "הטור מתכנס נקודתית אך לא במ"ש".

(ב) הטור שלנו הוא:

$$S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{inx}$$

ולכן, אם נציב $x=0$:

$$S(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$$

ולפי החישוב בסעיף הקודם:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\pi}$$

(ג) נציב בטור $x=\pi$:

$$S(\pi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\,e^{in\pi}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\,\widehat{f}(n)$$

ולפי החישוב בסעיף א':

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\,\widehat{f}(n)=\sqrt{\pi+\pi}=\sqrt{2\pi}$$

(ד) קל שפרסבל:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right|^2=\frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x+\pi)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

כלומר:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right|^2=\frac{3\pi}{2}$$