# פתרון תרגיל 3 אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

20 בנובמבר 2019

1. לאט ובזהירות.

(א) נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$, נקבל ש: $x_1 = 1$ והטענה אכן נכונה.
כעת, נניח שהטענה נכונה עבור $n$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n + 1$.
אם כן, יהיו $x_1, \ldots, x_{n+1}$ מספרים חיוביים המקיימים: $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$.
אפשר להניח שהמספרים מסודרים מהקטן לגדול, יעני $x_1 \leq \ldots \leq x_{n+1}$.
מכיוון שהמכפלה היא 1, אפשר לומר: $x_1 \leq 1, 1 \leq x_{n+1}$.
נסמן: $c = x_1 \cdot x_{n+1}$, ואז נוכל לרשום את התנאי על המכפלה באופן הבא: $x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot c = 1$. במכפלה יש $n$ חמודים, ולכן – לפי הנחת האינדוקציה – $x_2 + \ldots + x_n + c \geq n$ ושוויון מתקיים כאשר כולם שווים ל-$1$.
אם נוסיף 1 לשני האגפים נקבל: $x_2 + \ldots + x_n + x_1 \cdot x_{n+1} + 1 \geq n + 1$, ולכן מספיק להוכיח: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq x_2 + \ldots + x_n + x_1 \cdot x_{n+1} + 1$.
למה האי־שוויון החדש אכן מתקיים? אם נבטל את האיברים הזהים בשני האגפים, נקבל שצריך להוכיח: $x_1 + x_{n+1} \geq x_1 \cdot x_{n+1} + 1$, ואחרי העברת אגפים: $x_1 + x_{n+1} - x_1 \cdot x_{n+1} - 1 \geq 0$. כתותחי טרינום, נוכל לראות שמדובר ב: $(x_1 - 1)(1 - x_{n+1}) \geq 0$, ומכיוון ש: $x_1 \leq 1, 1 \leq x_{n+1}$, זה אכן מתקיים (שני המוכפלים הם אי־חיוביים).
נטפל גם במקרה של שוויון – $x_1 + \ldots + x_{n+1} = n + 1$. במצב כזה, נקבל אחרי אותם מהלכים: $(x_1 - 1)(1 - x_{n+1}) = 0$. יש לנו שני מקרים. אם $x_1 = 1$, מכיוון שמכפלת כולם היא 1 והוא הכי קטן נקבל שבהכרח כל השאר שווים ל־1.
אם $x_{n+1} = 1$ מכיוון שהוא הכי גדול נקבל שוב שכולם בהכרח שווים ל־1.

(ב) נסמן:

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}}$$

לכל $1 \leq i \leq n$. כל המספרים האלו חיוביים ומתקיים: $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, ולכן נוכל להשתמש בסעיף הקודם:

$$n \leq x_1 + \ldots + x_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}}$$

ולכן:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

כנדרש. **חשבו מתי מתקיים שוויון.**

(ג) ראשית, לפי הסעיף הקודם (עם 3 איברים):

$$b_{n+1} = \frac{b_n + b_n + \frac{5}{b_n^2}}{3} \geq \sqrt[3]{b_n \cdot b_n \cdot \frac{5}{b_n^2}} = \sqrt[3]{5}$$

כלומר, הסדרה חסומה מלמטה. נשתמש בחסם בשביל המונוטוניות:

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(b_n - \frac{5}{b_n^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{b_n^3 - 5}{b_n^2} \geq \frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - 5}{3b_n^2} = 0$$

ולכן $b_n \geq b_{n+1}$ והסדרה מונוטונית יורדת. מפה לשם, הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול - בנוסחת הנסיגה נשאיף $n \longrightarrow \infty$ ונקבל:

$$L = \frac{1}{3}\left(2L + \frac{5}{L^2}\right) \Longrightarrow 3L^3 = 2L^3 + 5 \Longrightarrow L = \sqrt[3]{5}$$

2. ראשית, נניח שהסדרה מתכנסת, כדי למצוא את הגבול ולהיעזר בו במידת הצורך. בנוסחת הנסיגה, נשאיף $n \longrightarrow \infty$ ונקבל:

$$L = \frac{6L + L^2}{2L + 3} \Longrightarrow 2L^2 + 3L = 6L + L^2 \Longrightarrow L^2 = 3L$$

יש שתי אופציות - $L = 0, 3$. האיברים הראשונים גדולים מ־3, אז ננסה להראות שמתקיים: $a_n \geq 3$, באינדוקציה.

עבור $n = 1$, $a_1 = 5$ ואכן $a_1 \geq 5$. נניח שהטענה נכונה עבור $n$: $a_n \geq 3$, ונוכיח ש: $a_{n+1} \geq 3$. אם כן, צ"ל:

$$a_{n+1} = \frac{6a_n + a_n^2}{3 + 2a_n} \geq 3$$

זה שקול ל: $6a_n + a_n^2 \geq 9 + 6a_n$ ששקול ל: $a_n^2 \geq 9$, וזה אכן מתקיים לפי הנחת האינדוקציה.

כעת, נראה שהסדרה מונוטונית יורדת. יש להראות ש: $a_{n+1} \leq a_n$, כלומר: $\frac{6a_n + a_n^2}{3 + 2a_n} \leq a_n$, יעני: $6 + a_n \leq 3 + 2a_n$, במילים אחרות: $3 \leq a_n$, שאכן מתקיים כפי שראינו.

הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ולכן מתכנסת. כפי שראינו, הגבול הוא 0 או 3, ומכיוון ש־3 חסם מלמטה, בהכרח $L = 3$.