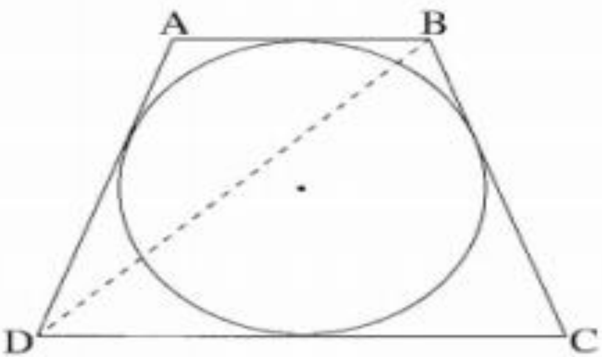
שאלות לתרגול הכיתה בנושא טריגונומטריה

תרגיל 1

מועד ב 2015



5. מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה־שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$), כמתואר בציור.

נתון: $\sphericalangle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

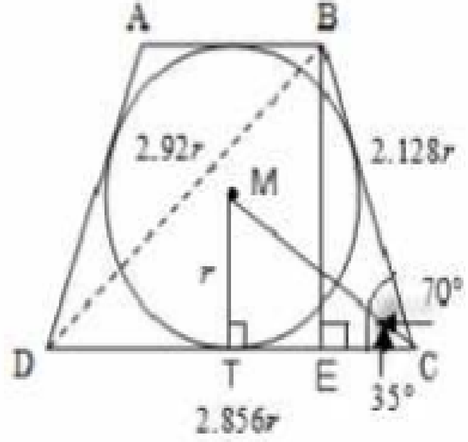
א. (1) $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים, שרדיוס המעגל החסום בו הוא** r **.**

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות, לכן $\sphericalangle MCT = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$ **.**

הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ולכן ΔMTC **ישר זווית.**

כיוון שהטרפז שווה שוקיים אז גם $\sphericalangle MDT=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ$ **ו-** ΔDMC **שווה שוקיים.**

לכן, הרדיוס הוא גם תיכון לבסיס המשולש ו- $BC=2TC$**.**



$\underline{\Delta MTC}$

$$\tan 35^\circ=\frac{MT}{TC}$$

$$TC=\frac{r}{\tan 35^\circ}$$

$$\boxed{TC=1.428r}$$

$$\boxed{DC=2.856r}$$

תשובה: הבסיס הגדול של הטרפז הוא $2.856r$**.**

(2) נוריד גובה BE **לבסיס הגדול של הטרפז, כאשר אורכו הוא** $2r$ **(מרחקים שווים בין ישרים מקבילים).**

$\underline{\Delta BEC}$

$$\sin 70^\circ = \frac{BE}{BC}$$

$$BC = \frac{2r}{\sin 70^\circ}$$

$$\boxed{BC = 2.128r}$$

תשובה: שוק הטרפז היא $2.128r$**.**

(3) $\underline{\underline{\Delta BCD}}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\sphericalangle C$$

$$(BD)^2 = (2.128r)^2 + (2.856r)^2 - 2 \cdot 2.128r \cdot 2.856r \cdot \cos 70°$$

$$(BD)^2 = 4.528r^2 + 8.157r^2 - 4.157r^2$$

$$(BD)^2 = 8.528r^2$$

$$\boxed{BD = 2.92r} \quad \leftarrow BD > 0$$

תשובה: אלכסון הטרפז הוא $2.92r$**.**

ב. המעגל החוסם את הטרפז $ABCD$ חוסם גם את ΔDBC.

$\underline{\Delta DBC}$ לפי משפט הסינוסים

$$2R=\frac{BD}{\sin 70^\circ} \rightarrow R=\frac{2.92r}{2\sin 70^\circ} \rightarrow \boxed{R=1.554r}$$

והיחס המבוקש: $\frac{r}{R}=\frac{r}{1.554r}=0.6435$.

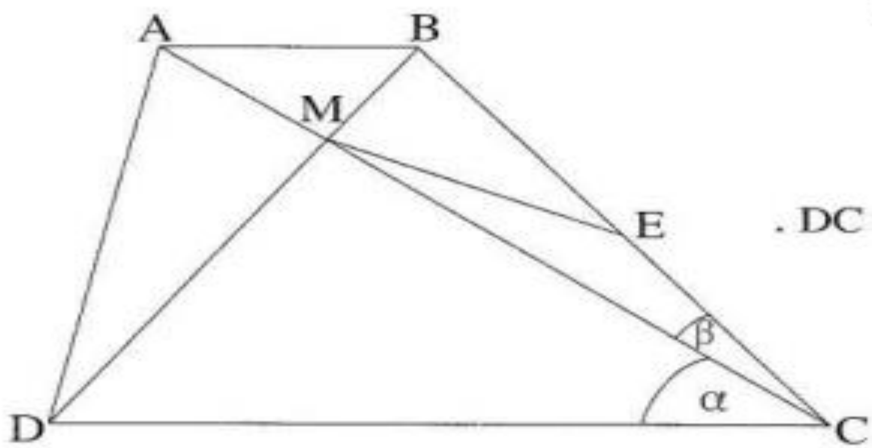
תשובה: היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז הוא 0.6435 .

נכתב ע"י עפר ילין

שאלה מספר 2

תרגיל 2

חורף 2015



אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה

ונפגשים בנקודה M.

E היא אמצע השוק BC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $DC = a$.

א. הבע באמצעות a , α ו־ β

את האורך של ME.

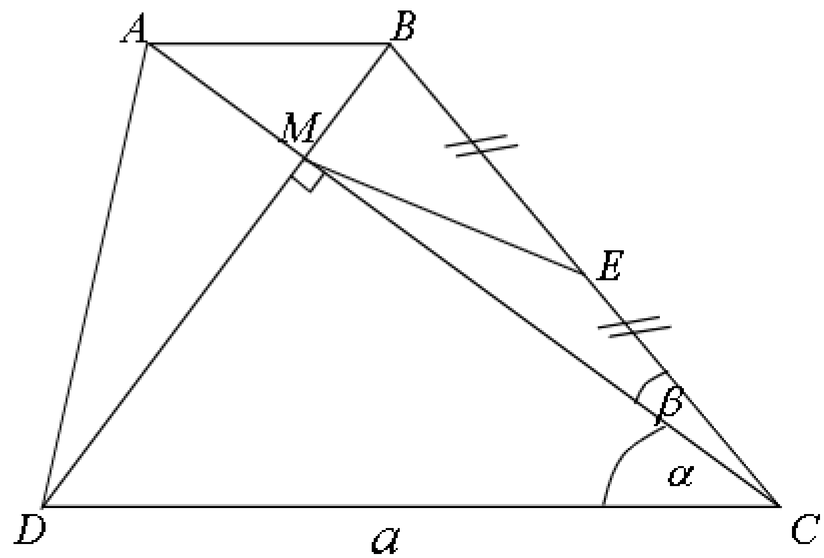
נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, 6.6 ס"מ $= a$.

ב. מצא את האורך של AB.

נתון גם: 1.3 ס"מ $= BM$.

ג. מצא את הזווית DCB.

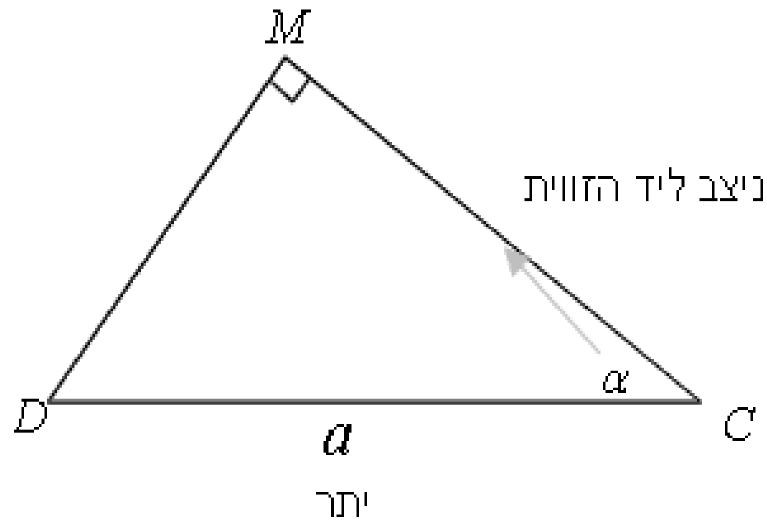
פתרון סעיף א



<u>סעיף א'</u>

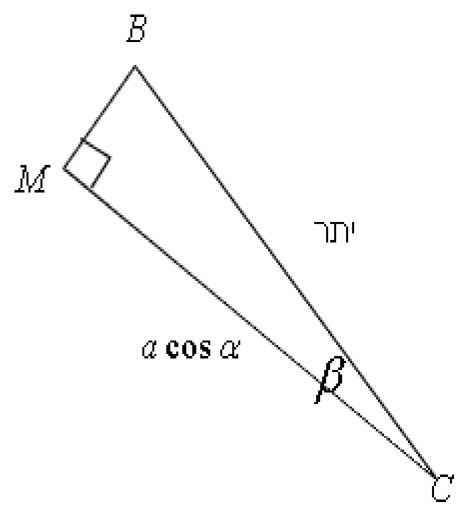
משולש MDC משולש ישר זווית עם 3 נתונים (a, α , 90 מעלות)
נשתמש בהגדרת הקוסינוס, ונמצא את צלע MC:

המשך סעיף א



$$\cos\alpha = \frac{\text{ניצב ליד הזווית}}{\text{יתר}} = \frac{MC}{DC} \rightarrow \cos\alpha = \frac{MC}{a} \rightarrow \boxed{MC = a\cos\alpha}$$

משולש MBC משולש ישר זווית עם 3 נתונים ($a\cos\alpha$, β , 90 מעלות)
נשתמש בהגדרת הקוסינוס, ונמצא את צלע BC:



$$\cos\beta = \frac{\text{ניצב ליד הזווית}}{\text{יתר}} = \frac{MC}{DC} \rightarrow \cos\beta = \frac{a\cos\alpha}{BC} \rightarrow \boxed{BC = \frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}}$$

נתון כי נקודה E היא אמצע BC, כלומר:

$$BE = CE = \frac{BC}{2} = \frac{\frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}}{2} = \boxed{\frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}}$$

נשלים צלעות וזוויות:

$\triangle BMC$ משולש ישר זווית (נתון)

E אמצע BC (נתון)

$\downarrow$

ME תיכון ליתר במשולש ישר זווית

$\downarrow$

$ME = BE = CE$ (במשולש ישר זווית, תיכון ליתר שווה למחצית היתר)

$\downarrow$

$\triangle MEC$ משולש שווה שוקיים (משולש בעל זוג צלעות שוות הוא משולש שווה שוקיים)

(במשולש ישר זווית, תיכון ליתר שווה למחצית היתר) $ME = BE = CE$

$\downarrow$

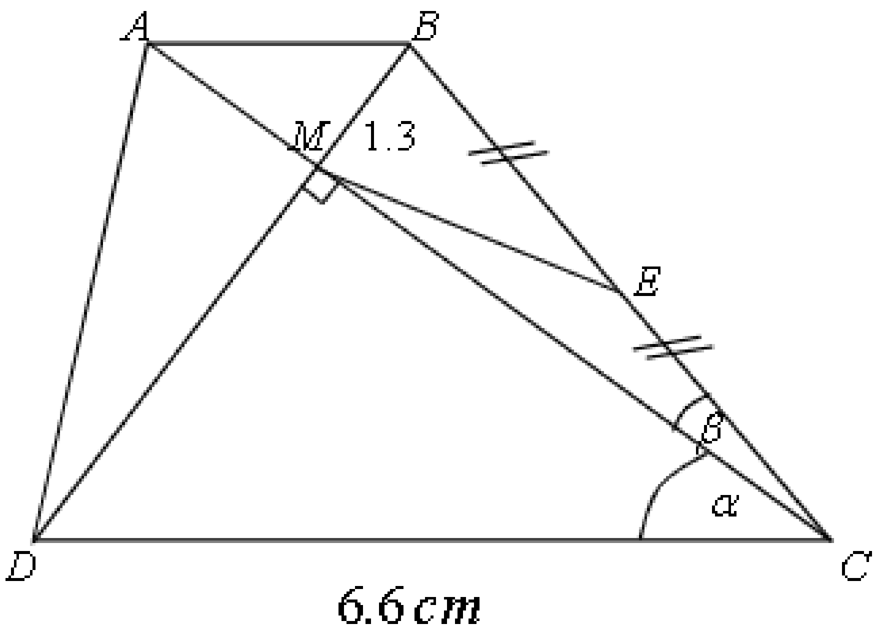
(משולש בעל זוג צלעות שוות הוא משולש שווה שוקיים) משולש שווה שוקיים $\triangle MEC$

$\downarrow$

$$ME = EC = \boxed{\frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'



נמצא את $\tan\alpha$ (על ידי שימוש בהגדרת הטנגנס במשולש MDC):

$$\tan\alpha = \frac{MD}{MC}$$

נמצא את $\tan\beta$ (על ידי שימוש בהגדרת הטנגנס במשולש MBC):

$$\tan\beta = \frac{MB}{MC}$$

נתון כי $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, כלומר:

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\frac{MB}{MC}}{\frac{MD}{MC}} = \frac{MB \cdot \cancel{MC}}{MD \cdot \cancel{MC}} = \frac{MB}{MD} = \frac{1}{3}$$

נתון כי ABCD טרפז, כלומר:

AB||DC

ולכן נשתמש במשפט תאלס מורחב:

$$\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{\underbrace{DC}_{6.6}}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{AB}{6.6}=\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{AB=2.2\,cm}$$

סעיף ג'

נתון כי MB=1.3.

מצאנו כי $\frac{MB}{MD} = \frac{1}{3}$, ולכן:

$$\frac{MB}{MD}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1.3}{MD}=\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{MD=3.9}$$

נשתמש בהגדרת הסינוס במשולש DMC:

$$\sin\alpha=\frac{DM}{DC} \rightarrow \sin\alpha=\frac{3.9}{6.6}=0.5909 \xrightarrow{shift\ sin} \boxed{\alpha=36.22^\circ}$$

נתון כי: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{1}{3}$, כלומר:

$$\frac{\tan\beta}{\tan 36.22^\circ}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{\tan\beta}{0.7324}=\frac{1}{3} \rightarrow \tan\beta=0.2441 \xrightarrow{shift\ \tan} \boxed{\beta=13.72^\circ}$$

ולכן זווית BCD היא:

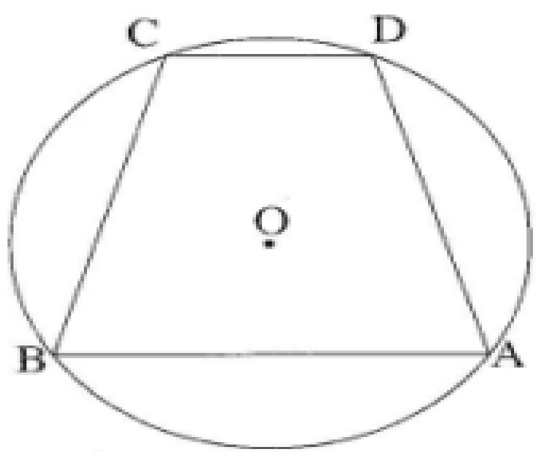
$$\sphericalangle BCD=\alpha+\beta=36.22^\circ+13.72=\boxed{49.94^\circ}$$

תשובה סופית סעיף ג'

שאלה מספר 4

תרגיל 3

קיץ מועד ב 2016



במעגל חסום טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$.

מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).

רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h.

נתון: $\sphericalangle COD = \alpha$, $\sphericalangle BOA = 3\alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle DAB$.

ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ R .

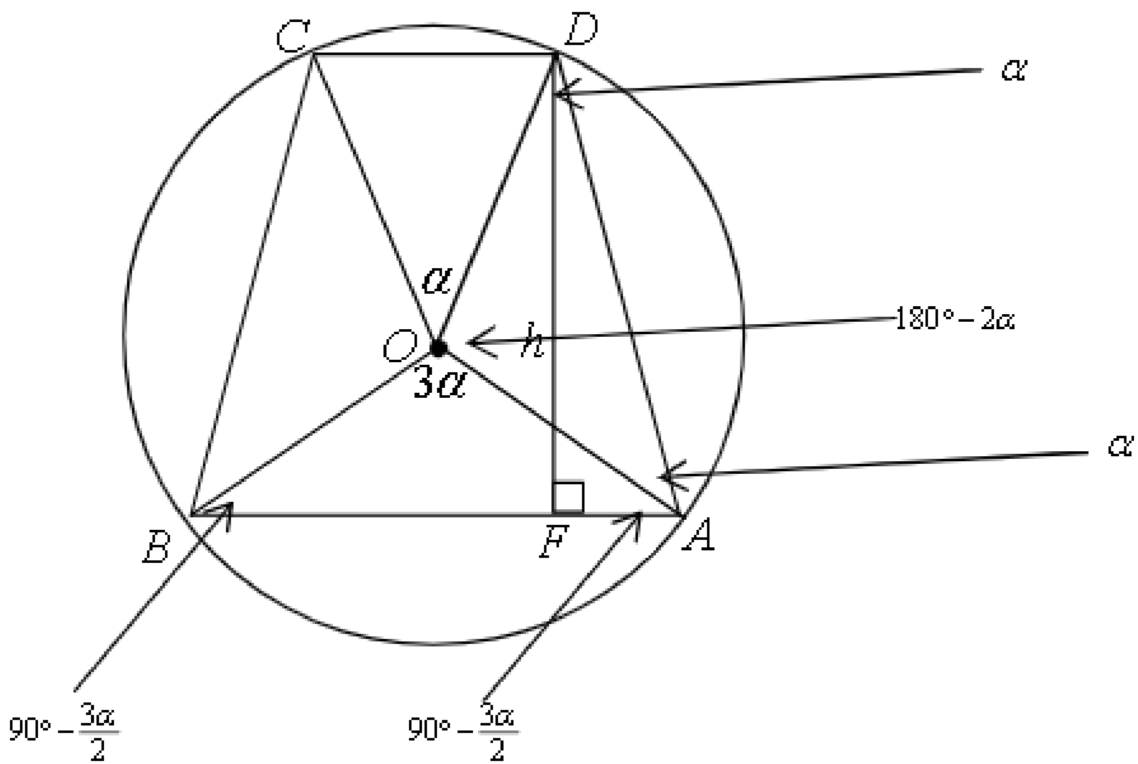
ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ h .

ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\dfrac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

מצא את α .

פתרון סעיף א

פתרון מלא:



טרפז ABCD חסום במעגל, ולכן:

ABCD טרפז שווה שוקיים - $AD = BC$

AD=BC, ולכן:

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC = \frac{360 - 3\alpha - \alpha}{2} = \frac{360 - 4\alpha}{2} = \boxed{180 - 2\alpha}$$

(זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים – שוות זו לזו)

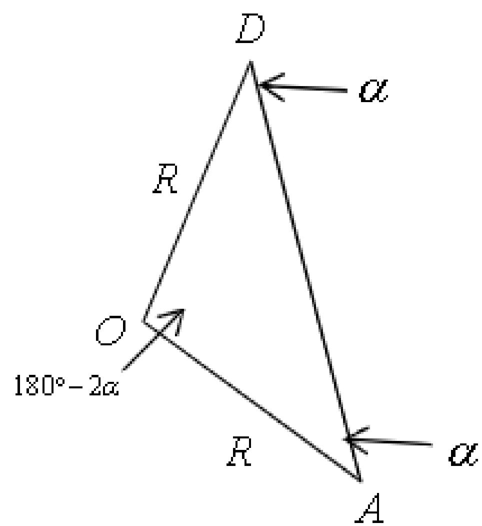
משולש AOD משולש שווה שוקיים (AO=DO=R), ולכן:

$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle OAD = \frac{180 - \left(180^\circ - 2\alpha\right)}{2} = \frac{180 - 180^\circ + 2\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \boxed{\alpha}$$

(זוויות בסיס במשו"ש שוות זו לזו, משלימות ל- 180 מעלות במשולש OAD)

סעיף ב'

משולש AEC הוא משולש עם 5 נתונים (3 זוויות, 2 צלעות),
נשתמש במשפט הסינוסים ונמצא את צלע AD, שוק הטרפז:



$$\frac{AD}{\sin \sphericalangle AOD}=\frac{DO}{\sin \sphericalangle DAO} \rightarrow \frac{AD}{\underbrace{\sin(180°-2\alpha)}_{\sin 2\alpha}}=\frac{R}{\sin\alpha} \rightarrow \frac{AD}{\underbrace{\sin 2\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{R}{\sin\alpha}$$

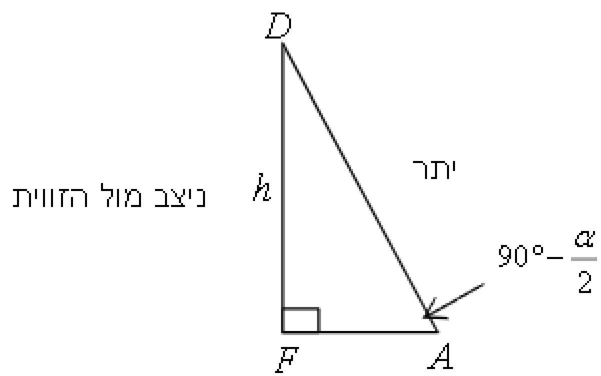
$$\rightarrow \frac{AD}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{R}{\sin\alpha} \quad \rightarrow \quad AD=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot R}{\sin\alpha} \quad \rightarrow \quad AD=\frac{2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha\cdot R}{\cancel{\sin\alpha}}$$

$$\rightarrow \boxed{AD=2\cos\alpha\cdot R}$$

תשובה סופית סעיף ב'

<u>סעיף ג'</u>

משולש ADF הוא משולש ישר זווית עם 3 נתונים (α , h, 90 מעלות),
נשתמש בהגדרת הסינוס ונמצא את אורך AD, שוק הטרפז:



$$\sin\sphericalangle DAF=\frac{\text{ניצב מול הזווית}}{\text{יתר}}=\frac{DF}{AD}\quad\rightarrow\quad\underbrace{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}_{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{h}{AD}\quad\rightarrow\quad\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{h}{AD}$$

$$\rightarrow\quad\boxed{AD=\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

תשובה סופית סעיף ג'

<u>סעיף ד'</u>

<u>מצד אחד נתון:</u>

$$S_{\triangle COD}=\boxed{\frac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

<u>מצד שני נחשב:</u>

$$S_{\triangle COD}=\frac{CO\cdot DO\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{R\cdot R\cdot\sin\alpha}{2}=\boxed{\frac{R^2\cdot\sin\alpha}{2}}$$

<u>נשווה בין שני הערכים:</u>

$$\frac{R^2\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

מצאנו בסעיף ג' כי $AD = \dfrac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, נבודד את h, ונקבל:

$$h = AD \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

מצאנו בסעיף ב' כי $AD = 2\cos\alpha \cdot R$, נבודד את R ונקבל:

$$R = \frac{AD}{2\cos\alpha}$$

נציב את h ו- R ונקבל:

$$\frac{R^2 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{\left(\dfrac{AD}{2\cos\alpha}\right)^2 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\left(AD \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{\dfrac{AD^2 \cdot \sin\alpha}{4\cos^2\alpha}}{2} = \frac{AD^2 \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\cancel{AD^2} \cdot \sin\alpha}{8\cos^2\alpha} = \frac{\cancel{AD^2} \cdot \cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{12\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{8\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{8}{12}$$

$$\rightarrow \quad 12\sin\alpha = 8\left(1-\sin^2\alpha\right) \quad \rightarrow \quad 12\sin\alpha = 8-8\sin^2\alpha \quad \rightarrow \quad 8\sin^2\alpha + 12\sin\alpha - 8 = 0$$

נסמן $\sin\alpha = t$:

$$8t^2+12t-8=0 \quad \rightarrow \quad t_{1,2}=\frac{-12\pm 20}{16} \begin{array}{l} \nearrow \; t_1 = 0.5 \\ \searrow \; t_2 = -2 \end{array}$$

נציב את $t_2=-2$, $t_1=0.5$ ב- $\sin\alpha = t$

$\cancel{t_2=-2: \quad \sin\alpha=-2}$

$t_1=0.5: \quad \underbrace{\sin\alpha=0.5}_{\text{אי שוויון טריגונומטרי}}$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l}\alpha = 30° + 360°k \\ \alpha = 150° + 360°k\end{array}\right.}$$

פתרון כללי למשוואה הטריגונומטרית

$\underline{\alpha}$ היא זווית במשולש ולכן $0° < \alpha < 180°$.

אך בגלל הזווית $\sphericalangle AOB = 3\alpha$ לא ייתכן כי $\alpha = 150°$, כי אז זווית AOB תהיה גדולה מ- 360 מעלות.

לכן: $\boxed{\alpha = 30°}$

תשובה סופית סעיף ד'