תשובות לבוחן־ חשבון אינפיניטיסימאלי_3

24 בדצמבר 2015

שם הקורס: חשבון אינפיניטיסימאלי 3

מספר הקורס: 88־032

מועד בחינה: 51.21.51

זמן הבחינה: 021 דקות

חומר עזר: מחשבון בלבד

1. תשובה בתרגיל 1 שאלה 1.

2. תשובות בתרגיל 3 שאלה 2.

3. ענו על השאלות הבאות:

   (א) תשובות בתרגיל 4 שאלה 1.

   (ב) תשובות בתרגיל 4 שאלה 2 א.

   (ג) בדקו את רציפות הפונקציה בנקודה $(0,0)$:

$$f(x,y)=\{\begin{array}{ll}\frac{xy}{\sqrt{x^2+sin^2y}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \qquad ,(x,y)=(0,0)\end{array}$$

תשובה: נוכיח רציפות בנקודה $(0,0)$ בעזרת משפט הסנדויץ:

$$0\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+sin^2y}}\right|_*\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}}\right|\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}\right|$$

$$<\left|\frac{\sqrt{2}xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\sqrt{2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|y|\underset{y\to0}{_{**}\to}0$$

*נובע מכך שאנו יודעים $lim_{y\to 0}\frac{siny}{y}=1$ ואז עבור $|y|$ קטן מספיק $sin^2y\geq\frac{y^2}{2}$.

** נובע מכך ש$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1$ ולכן פונקציה חסומה כפול פונקציה ששואפת לס - שואף לס.

לפי משפט הסנדויץ $lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+sin^2y}}\right|=0$ ולכן $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+sin^2y}}=0$. והוכחנו רציפות ב$(0,0)$.

4. (33 נק') האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב$-(0,0)$:

(א) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ תשובות בתרגול כיתה מס' 6 בנושא: דיפרנציאביליות.

(ב)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2|y|^{1.5}}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

תשובה: תחילה, נמצא את הנגזרות החלקיות בנק' $(0,0)$:

$$f_x(0,0)=lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$
$$f_y(0,0)=lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

כדי שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית צריך להתקיים התנאי הבא:

$$lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-0-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

נוכיח: $lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-0-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=$
$lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2|h_2|^{1.5}}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2}{(h_1^2+h_2^2)}\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}|h_2|^{0.5}=_*0$

* מכיוון ש$\frac{h_1^2}{(h_1^2+h_2^2)}\leq 1$ ו$\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq 1$ הביטוי כולו הוא מכפלה של פונקציות חסומות ופונקציה ששואפת לס ולכן כל הביטוי כולו שואף לס.

(ג) תשובות בתרגיל 5 שאלה 3ב.