נכתב על ידי נועם יערי

## הגדרה

עבור סדרה $a_n$ נסמן $S_n \coloneqq a_1 + \cdots + a_n$.

$S_n$ נקרא **הסכום החלקי** של $n$ האיברים הראשונים בסדרה $a_n$.

אם $S_n \to s$, נכתוב $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא טור, ונאמר שהטור מתכנס אם הסדרה $S_n$ מתכנסת. אם $S_n$ אינה מתכנסת, נאמר שהטור מתבדר (אפילו אם $S_n \to \infty$ או $S_n \to -\infty$).

## דוגמה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ מתבדר. $S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, ..$ $(S_1, S_2, \dots) = (-1,0,-1,0,..)$.

הסדרה אינה מתכנסת : יש לה שני גבולות חלקיים שונים.

## דוג'

טור הנדסי : $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$. $a, a \cdot q, a \cdot q^2, ..$ , $a \neq 0$.

טענה : הטור ההנדסי מתכנס $\Leftrightarrow |q| < 1$.

הוכחה : $S_n \coloneqq a + a \cdot q + \cdots + a \cdot q^{n-1} \Leftarrow q \cdot S_n = a \cdot q + \cdots a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n \Leftarrow$

$S_n - q \cdot S_n = a - a \cdot q^n = a(1 - q^n)$.

מקרים אפשריים :

1) $q = 1$ הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} a$, $S_n = a + \cdots + a = n \cdot a$.

$n \cdot a \to \pm\infty$ לפי אם $a > 0$ או $a < 0$.

סיכום : עבור $q = 1$, הטור מתבדר.

2) $q \neq 1$ : $(1 - q) = a \cdot (1 - q^n) \Leftarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \left(\frac{a}{1-q}\right) \cdot (1 - q^n)$.

$q^n$ מתכנסת $\leftrightarrow |q| < 1$. לכן, $S_n$ מתכנסת $\leftrightarrow |q| < 1$.

הערה : במקרה $|q| < 1$ נקבל (נוסחת סכום סדרה אינסופית).

## תזכורת

הפרדוקס של זנו.

$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \neq \infty$, למשל $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 < \infty$.

## דוג'

טור טלסקופי : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$, $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +..+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

**הערה**

אם $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ אז $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ לכל $n > 1$. כלומר, ניתן לשחזר את הסדרה מתוך סכומיה החלקיים.

**קריטריון קושי להתכנסות טורים:**

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ לכל $\epsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $N \le n \le m$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| = |S_m - S_n| < \epsilon$$

מידי מקושי עבור הסדרה $S_n$.

**דוג'**

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר. (ראינו: $\overset{n\to\infty}{\to} \infty$ $S_n$ למרות שמתקיים $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \to 0$, זה לא מספק. דרוש שלכל $n < m$, $n$ מספיק גדול, $S_m - S_n$ יהיה קטן.

**משפטי התכנסות טורים:**

**למה**

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \to 0$.

**הוכחה**

$a_n = S_n - S_{n-1} \to s - s = 0$ $(n \ge 2)$.

**דוג'**

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{חזקה של } 10^9 \; n \\ 0, & \text{אינו חזקה של } 10^9 \; n \end{cases}$$

$(a_1, a_2, \ldots) = (0,0,0, \ldots)$ יש תת סדרה $a_{m_n} = 1$ ולכן $a_n \nrightarrow 0$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

**הגדרה**

**זנב/שארית של טור** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מהצורה $r_m \coloneqq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$.

**למה**

התכנסות טור תלויה רק בזנב שלו -

התכונות הבאות שקולות:

1. הטור מתכנס.
2. כל זנב של הטור מתכנס.
3. יש לטור זנב שמתכנס.

**הוכחה**

$\mathbf{1 \to 2}$:

יהי $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אז $S = s_m + r_m$ לכל $m$:

לכל $m < n$, $S_{m+n} = S_m + (a_{m+1} + \cdots + a_{m+n})$.

$(S_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה של $S_n{}_{n=1}^{\infty}$ ולכן $S_{m+n} \to_{n\to\infty} S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_{m+n} - S_n \to_{n\to\infty} S - S_m \epsilon R$$

כלומר הזנב $r_m$ מתכנס.

$\mathbf{2 \to 3}$:

מידי.

$\mathbf{3 \to 1}$:

נניח שיש זנב מתכנס $r_m$. לכל $n$, $S_{m+n} = \overset{\text{קבוע}}{S_m} + \underbrace{S_n'^{\to(r_m \in R)}}_{\text{סכום } n \text{ אברים ראשונים בזנב}}$

לכן: $S_{n+m} \to_{n\to\infty} S_m + r_m \in R$.

$(S_{n+m})_{n=1}^{\infty} = (S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots)$ מתקבלת מהסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י מחיקת מספר סופי של איברים לכן גם $S_n \to S_m + r_m$.

אפשר לסכם מה שראינו בהוכחה כך:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right) + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\right)$$

במובן שהטור $s$ מתכנס אם ורק אם הטור $r_m$ מתכנס ומקבלים שוויון.

**מסקנות**

(א) שינוי, מחיקה, או הוספה של מספר סופי של מחוברים בטור אינם משפיעים על התכנסותו/התבדרותו (אבל כן משנים את סכומו). [כי לאחר השינוי יהי $N$ כך שהזנב $r_N$ של הטור החדש הוא זנב של הטור הישן (אולי מתחיל ממקום אחר)]

(ב) אם טור מתכנס אז זנבותיו מקיימים $r_m \to_{m\to\infty} 0$. $S = S_m + r_m \to r_m \to 0$