תרגול 3

10 יולי, 2016

שגיאת התבטלות:

אם מחסירים שני מספרים קבועים קרובים, השגיאה היחסית גדלה כיוון שמספר ספרות משמעותיות גדול מתבטל.

דוגמה:

במחשב בעל ייצוג של 6 ספרות במנטיסה , נחשב –

$$\underbrace{1.23456}_{\text{6 ספרות משמעותיות}}789 - \underbrace{1.23000}_{\text{6 ספרות משמעותיות}}000$$

לפי חישוב אמיתי , חיסור זה נותן - 0.00456789.

לעומת זאת , מאחר והמחשב מייצג מספרים עד 6 ספרות במנטיסה נקבל שהחיסור נותן - 0.00456 , כלומר איבדנו 3 מתוך 6 ספרות משמעותיות.

תרגיל:

מצאו דרך להקטין את השגיאה בחישוב החיסור הבא:

$$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$$

כאשר a קטן.

פתרון:

$$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} =_{\text{כפל בצמוד}} \left(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\right) * \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}$$
$$= \frac{(1+a) - (1-a)}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}} = \frac{2a}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}$$

בתוצאה שקיבלנו אין חיסור של מספרים קרובים – במכנה נקבל מספר קרוב ל-2 עם דיוק גבוה (a קטן). במונה גם אין בעיית דיוק. הדיוק של התוצאה הסופית יהיה גבוה.

כעת, איך מעריכים את הדיוק הנ"ל ומה עושים כאשר לא רואים את הטריק של כפל בצמוד או אין אפשרות לעשותו?

תשובה:

בחלק גדול מהמקרים אפשר לפתח את הביטוי לטור טיילור וזה יפתור את בעיית ההתבטלות:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$=> f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} => f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$=> f''(x) = -\frac{1}{4\left(\sqrt{1+x}\right)^3} => f''(0) = \frac{1}{4}$$

$$=> \ f'''(x) = \frac{1}{12\left(\sqrt{1+x}\right)^5} => f'''(0) = \frac{1}{12}$$

ומכאן נפתח את $f(x)$ לטור טיילור –

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2} * (x-0) - \frac{1}{4} * \frac{(x-0)^2}{2!} + \frac{1}{12} * \frac{(x-0)^3}{3!} - \cdots$$

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{72}x^3 - \cdots$$

נציב $x = a$ וגם $x = -a$ כדי להגיע לשורשים הנתונים בתחילת התרגיל:

$$f(a) = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{72}x^3 - \cdots$$

$$f(-a) = 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{72}x^3 - \cdots$$

ונחסר ונקבל –

$$f(a) - f(-a) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} = a^1 + \frac{1}{36}a^3 + \cdots$$

אם a קטן אז האיבר הדומיננטי בסכום הוא a^1.

<u>הערכה לשגיאה:</u> סדר השגיאה - a^1 או $o(a^1)$.

■

<u>תרגיל:</u>

הסבר את הבעייתיות של הפונקציה כפי שהוא נתון עבור $x \approx 0$, והסבר כיצד ניתן לפתור בעיה זו.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} - \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

<u>פתרון:</u>

<u>מטרת התרגיל</u> - לבטא את בעיית ההתבטלות בצורה אנליטית מדויקת למרות שב - $x \approx 0$ מתקיים –

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x} \approx 0\,, \sin\left(\sqrt{x}\right) \approx 0$$

ידוע ש –

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$=> \frac{\sqrt{x}}{1-x} = x^{0.5} + x^{1.5} + x^{2.5} + x^{3.5} + \cdots$$

עוד ידוע ש –

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$=> \sin(\sqrt{x}) = x^{0.5} - \frac{x^{1.5}}{3!} + \frac{x^{2.5}}{5!} - \frac{x^{3.5}}{7!} + \cdots$$

ולכן נקבל –

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x} - \sin(\sqrt{x}) =$$

$$= (x^{0.5} + x^{1.5} + x^{2.5} + x^{3.5} + \cdots) - \left(x^{0.5} - \frac{x^{1.5}}{3!} + \frac{x^{2.5}}{5!} - \frac{x^{3.5}}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{7}{3!}x^{1.5} + \frac{119}{5!}x^{2.5} + \cdots$$

תופעת ההתבטלות מתבטאת באמצעות $\sqrt{x}$ שהוא הגורם המבטל במקרה זה (הוא מצטמצם בחיסור שני הסכומים למעלה). $\frac{7}{3!}x^{1.5}$ הגורם הדומיננטי ולכן מספיק לחשב רק את $\frac{7}{3!}x^{1.5}$ עבור $x \approx 0$ כדי לקבל קירוב טוב לערך של הפונקציה.

■

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה - $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. זהה באילו מקרים ישנה שגיאת התבטלות והצע דרך חלופית לחישוב הפונקציה.

<u>פתרון:</u>

עבור x-ים גדולים מאוד, יש שגיאת התבטלות. לכן נשתמש טריק של כפל בצמוד –

$$\sqrt{x^2+1} - x = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) * \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

■

<u>תרגול 3</u>

10 יולי, 2016

<u>תרגיל:</u>

נתונה משוואה ריבועית כללית –

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ידוע את פתרונות המשוואה –

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אם $b^2 \underbrace{\ll}_{\text{קטן ממש}} |4ac|$, כלומר $4ac$ זניח לעומת b^2, אז אחד השורשים מתקבל בצורה שגויה כי הוא יהיה קרוב ל-0.

<u>במקרה זה:</u>

1) נמצא את השורש ה"גדול" מבין השניים.

2) נשתמש בנוסחת וייטה –

$$x_1 * x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

תרגול 3

10 יולי, 2016

שורש של משוואה:

x_0 יקרא שורש של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x_0) = 0$.

x_0 יקרא שורש פשוט של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x_0) = 0$ ו - $f'(x_0) \neq 0$.

x_0 יקרא שורש מסדר n של הפונקציה אם –

$$\begin{cases} f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

פתרון משוואות לא לינאריות:

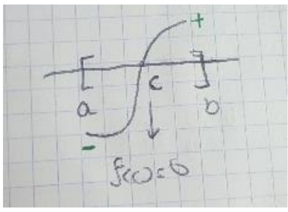
ניקח לדוגמה את הפונקציה - $f(x) = e^{2x} - xcos(x)$. אין דרך אנליטית לחשב את השורש x_0. נשתמש בשיטה איטרטיבית (כלומר, אלגוריתם שנותן קירוב לפתרון בשלב n ומשתמש בקירוב זה למציאת קירוב טוב יותר בשלב ה- $n+1$) למציאת השורש.

תזכורת:

משפט ערך הביניים של קושי: תהי $f(x)$ פונקציה אציפה בקטע $[a, b]$. אם:

$$f(a) * f(b) < 0$$

אזי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = 0$, כלומר c שורש של הפונקציה.



שיטת החצייה $(bisection)$

האלגוריתם :

1) בחרו קטע כלשהו $[x_0, x_1]$ כך ש - $f(x_0) * f(x_1) < 0$.

2) נחשב את $x_2 = \frac{x_0+x_1}{2}$.

3) אם $f(x_2) = 0$ סיימנו.

4) אם מתקיים $f(x_0) * f(x_2) < 0$ אז נמשיך עם הקטע $[x_0, x_2]$, אחרת נמשיך עם הקטע $[x_2, x_1]$.

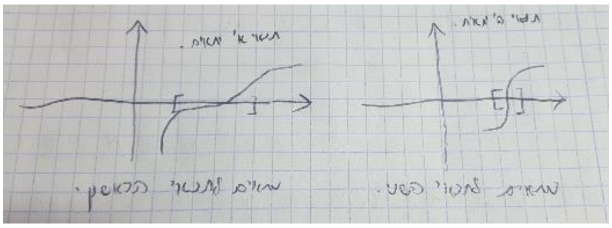
5) נחזור ל – 2.

תרגול 3 10 יולי, 2016

<u>תנאי עצירה:</u>

א) $|f(x_2)| < \epsilon$, כלומר הפונקציה קרובה ל – 0 עד ערכי ϵ.

ב) $|x_0 - x_1| < \delta$, כלומר הגענו לקטע קטן מאוד שבתוכו נמצא השורש.



<u>הערה:</u>

נסמן ב – n להיות מספר האיטרציות לקבלת דיוק ϵ נתון. נמצא נוסחה לשם מציאת מספר איטרציות בהינתן ϵ (דיוק) –

נסמן ב - L_i את אורך הקטע לאחר האיטרציה ה- i. לכן -

$$L_1 = b - a$$

$$L_2 = \frac{b-a}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$L_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \le \epsilon$$

נפעיל $\log_2(\ )$ ונקבל –

$$\log_2\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \le \log_2 \epsilon$$

$$\log_2(b-a) - n\underbrace{\log_2 2}_{1} \le \log_2 \epsilon$$

$$\boxed{n \ge \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}$$

<u>יתרונות וחסרונות השיטה:</u>

<u>יתרונות:</u> בחירת קטע מתאים תבטיח התכנסות ודאית של השיטה.

<u>חסרונות:</u>

1. התכנסות יחסית איטית (לינארית).
2. אם נבחר את אחד מהקצוות בקטע קרוב לשורש זה יאט את קצב ההתכנסות .
3. אם הפונקציה משיקה לציר ה- x לא נוכל להשתמש בשיטה.

תרגול 3

10 יולי, 2016

הערה:

באופן כללי, כיצד נבחר קטע מתאים שבו $f(a)*f(b)<0$ והפונקציה רציפה:

א) ננחש ונבדוק.

ב) בעזרת $MATLAB$.

דוגמה:

השתמש בשיטת החצייה בשביל למצוא קירוב ל- $\sqrt{11}$ כך ש- $|f(x)|<0.4$.

נבחר את $f(x)$ להיות - $f(x)=x^2-11$. נשים לב כי –

$$f(3)=3^2-11=-2<0$$

$$f(4)=4^2-11=5>0$$

ולכן הקטע ההתחלתי הינו $[3,4]$.

נבנה טבלת איטרציות –

n = מספר איטרציות	a_n	$c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	b_n	$f(c_n)$
1	$a_1=3$	$c_1=3.5$	$b_1=4$	$f(c_1)=1.25\ (+)$
2	$a_2=3$	$c_2=3.25$	$b_2=3.5$	$f(c_2)=-0.4375\ (-)$
3	$a_3=3.25$	$c_3=3.375$	$b_3=3.5$	$f(c_3)=0.39\ (+)$

קיבלנו ש - $|f(c_3)|<0.4$ ולכן עצרנו את האיטרציה וקיבלנו שהשורש - $x\approx 3.375$.

תרגול 3

10 יולי, 2016

סדר ושיעור התכנסות

הגדרה: עבור סדרת קרובים $x_1, x_2, \ldots, \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ המתכנסים ל – z, אם קיימים $p \geq 1$ ו - $c \neq 0$ כך ש –

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^p} = c$$

אזי p נקרא סדר ההתכנסות ו – c נקרא שיעור ההתכנסות. בין שתי שיטות, זו שיש לה סדר התכנסות גדול יותר תהיה מהירה יותר. במקרה שבו סדר ההתכנסות זהה בשתי השיטות , זו שיש לה שיעור התכנסות נמוך יותר תהיה עדיפה.

<u>עבור שיטת החצייה:</u>

נסמן - $e_n = |z - x_n|$, $e_{n+1} = |z - x_{n+1}|$. אז לפי ההגדרה לעיל נקבל –

$$e_{n+1} \leq c * (e_n)^p$$

מאחר ובשיטת החצייה מתקיים–

$$e_{n+1} \leq \frac{1}{2} e_n$$

נקבל ש - $c = \frac{1}{2}$, $p = 1$.

לכן, בשיטת החצייה סדר ההתכנסות הוא 1 (ליניארי) ושיעור ההתכנסות הוא $\frac{1}{2}$.

<u>הערה:</u>

פקודה ב – $MATLAB$ לפתרון משוואה לא לינארית:

$$\left[\underbrace{x}_{\text{השורש}} , \underbrace{fval}_{\text{ערך הפו' בשורש}} , exitflag, \underbrace{output}_{\text{מידע על פתרון המשוואה}}\right] = fzero(\underbrace{f(x)}_{\text{הפונקציה}} , \underbrace{x_0}_{\text{איפה לחפש}} , options)$$

(בנוסף יש פקודה ב – $MATLAB$ שנקראת $fsolve$ שפותרת **<u>מערכת</u>** של משוואות אי לינאריות).