# תרגיל בית מספר 1

## שאלה 1

הוכח שבשדה מתקיימים התכונות הבאות:

א. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $-(-a) = a$.

ב. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $(-1) \cdot a = -a$.

ג. לכל שני איברים $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

## שאלה 2

הוכח שאם $char(\mathbb{F}) \neq 0$, אזי $char(\mathbb{F})$ הוא מספר ראשוני.

(רמז: הוכח ש $(n \cdot 1_{\mathbb{F}}) \cdot (m \cdot 1_{\mathbb{F}}) = (nm) \cdot 1_{\mathbb{F}}$.

## שאלה 3

הוכח שהקבוצה $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$, עם פעולות החיבור והכפל של שדה הממשיים היא שדה.

## שאלה 4

פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$.

ב. $z^2 - (1-3i)z - 2i - 2 = 0$.

ג. $(i+1)(x+iy) = 4+2i$. x,y מספרים ממשיים.

## שאלה 5

חשב, ללא שימוש במשפט דה מואבר, את הביטויים הבאים:

א. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^8$.

ב. $\frac{5}{3+2i}$.

ג. $\left(1 + i + i^2 + \ldots + i^{34}\right)^{71}$.

## שאלה 6

א. הראה שלכל מספר מרוכב $z=a+bi$ יש הופכי ונגדי.

ב. הוכח שלכל שני מספרים מרוכבים $z_1, z_2$ (השונים מ 0) מתקיים $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

ג. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
הוכח שלכל n טבעי סכום 6n האיברים הראשונים הוא 0.

ד. פתור, בעזרת משפט דה מאובר, את המשוואות הבאות:
i. $z^7 = 1$.
ii. $z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$.

## שאלת בונוס

חשב את הסכום $\sin\alpha + \sin(3\alpha) + ... + \sin(2n-1)\alpha$ (רמז: משפט דה מאובר)
הדרכה לשאלה:

א. הראה שהסדרה:
$(\cos\alpha + i\sin\alpha), (\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)), ..., (\cos(2n-1)\alpha + i\sin(2n-1)\alpha)$
היא סדרה הנדסית.
ב. חשב את סכום הסדרה בעזרת הנוסחה שהראינו בתרגול.
ג. שים לב שבמספרים מרוכבים $a+bi = c+di \leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

# בהצלחה!!!