אינפי 3

תרגול 8

מישור משיק:

משטח ב$-\mathbb{R}^3$ נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה שבסביבה U שלה f גזירה ברציפות.

משוואת המישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 היא:

$$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$$

זכרו שמשוואת מישור היא: $ax+by+cz+d=0$. נורמל למישור במקרה זה הוא וקטור המקדמים, קרי: (a,b,c).

במקרה של המישור המשיק, נקבל שהנורמל הוא $(f_x(p_0),f_y(p_0),f_z(p_0))$.

המישור המשיק הוא המרחב הנפרש ע"י וקטורי הנגזרות הכיווניות.

תרגיל:

מצאו את כל הנקודות p_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 מקביל למישור: $x+y+z=1$.

פתרון:

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה במשטח. נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x \qquad f_y=2y \qquad f_z=-2z$$

ולכן בנקודה שלנו הנורמל למישור המשיק יהיה $(2x_0, 2y_0, -2z_0)$.

כעת, מישורים מקבילים אם הנורמלים שלהם תלויים ליניארית.

הנורמל למישור $x+y+z=1$ הוא $(1,1,1)$. לכן, נחפש את כל הנקודות p_0 במשטח כך ש:

$$a \cdot (1,1,1) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

נקבל:

$$x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{a}{2}, z_0 = -\frac{a}{2}$$

כעת, הנקודה שלנו על המשטח, ולכן צריך להתקיים:

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1 = 0$$

כלומר:

$$\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=1$$

ולכן $a=\pm 2$.

ולכן שתי הנקודות שתקיימנה את הדרוש הן:

$$(1,1,-1),(-1,-1,1)$$

נק' קיצון-קצת הגדרות

מטריצת ההסיאן: מטריצת הנגזרות השניות

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

שימו לב שמכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, לכל $1\leq i,j\leq n$ מתקיים: $f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$,

ולכן H מטריצה סימטרית.

נק' קיצון-קצת הגדרות

<u>מינור ראשי:</u> תהי A מטריצה ריבועית. המינור הראשי מסדר i הוא

המטריצה מגודל $i \times i$ בפינה השמאלית העליונה של A.

נק' קיצון-קצת הגדרות

<u>מטריצה חיובית לחלוטין:</u> כל הערכים העצמיים חיוביים או, באופן שקול, כל המינורים הראשיים חיוביים.

<u>מטריצה שלילית לחלוטין:</u> כל הערכים העצמיים שליליים או, באופן שקול, המינורים הראשיים מגודל אי-זוגי הם שליליים ואילו מגודל זוגי הם חיוביים.

נקודות קיצון:

איך מוצאים נקודות קיצון בפונקציה של כמה משתנים?

תנאי הכרחי הוא $\nabla f = 0$, ולכן נפתור את המשוואות המתקבלות כדי למצוא נקודות חשודות.

זה שקול לתנאי $f'(x) = 0$ בפונקציה של משתנה אחד.

לאחר מכן, בודקים את מטריצת ההסיאן, המטריצה של הנגזרות השניות.

אם המטריצה חיובית לחלוטין, קרי כל הערכים העצמיים חיוביים (או, באופן שקול, כל המינורים הראשיים חיוביים), זו נקודת מינימום.

אם המטריצה שלילית לחלוטין, קרי כל הערכים העצמיים שליליים (או, באופן שקול, המינורים הראשיים מגודל אי־זוגי שליליים ואלו מגודל זוגי חיוביים), זו נקודת מקסימום.

הערות:

מציאת חיוביות ושליליות של מטריצה ע"י מינורים ראשיים נעשה עפ"י קריטריון סילבסטר.

אם המטריצה לא שלילית ולא חיובית בנק' (החשודה) אזי זוהי נק' אוכף, למעט המקרה בו

$\det\left(M_i\right)=0$ או $\lambda_i=0$ עבור $1\leq i\leq n$ כלשהו, אנו מתייחסים

אל הערך או אל המינור כאל כזה שלא נותן לנו מידע, ויכול להיות חיובי או שלילי.

למשל, אם בנקודה מסוימת הערכים העצמיים הם $0,1,2,2$, אנו לא יודעים אם זו נקודת מינימום או אוכף (זו בוודאי לא נקודת מקסימום כי יש ערכים עצמיים חיוביים).

לעומת זאת, אם הערכים העצמיים הם $0, 1, 2, -6$ אנו יודעים שזו נקודת אוכף מכיוון שיש ערכים עצמיים חיוביים וערך עצמי שלילי.

במצב בו באמת לא ניתן להכריע בעזרת ההסיאן (למשל ע"ע $0, 1, 2, 2$ כמו שהזכרנו), נבדוק את סוג הנקודה "ידנית", בדומה לבדיקת עלייה וירידה בפונקציה של משתנה יחיד.

תרגיל:

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וסווגו אותן.

1. $u(x,y,z)=3x^3+y^2+z^2+6xy-2z+1$

פתרון:

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל את המערכת:

$$u_x=9x^2+6y=0$$

$$u_y=2y+6x=0$$

$$u_z=2z-2=0$$

שפתרונה הן הנקודות: $(2,-6,1), (0,0,1)$. מטריצת ההסיאן היא:

$$H_u = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,0,1)$, נקבל שהמינור השני הוא $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ולכן זו נקודת אוכף.

בנקודה $(2,-6,1)$, נקבל שכל המינורים (או כל הערכים העצמיים) חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

2. $u(x,y)=3(x^2+y^2)+x^3+4y$.

מצאו את נק' הקיצון של הפונקציה

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל את המערכת:

$$u_x=6x-3x^2=0$$

$$u_y=6y+4=0$$

לכן הנקודות החשודות לקיצון הן $(0,-\frac{2}{3}),(2,-\frac{2}{3})$.

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_u=\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

בנקודה $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ נקבל ששני הערכים העצמיים חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

בנקודה $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ נקבל המינור השני שלילי ולכן זו נקודת אוכף.

<u>תרגיל:</u>

מצאו נקודות קריטיות עבור הפונקציה הבאה וסווגו אותן:

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

כאשר $a > 0$.

<u>פתרון:</u>

בנוהל, נשווה את הגדיאנט ל־0:

$$f_x = 4x^3 - 4a^2x = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4a^2y = 0$$

$$f_z = 4z^3 - 4a^2z = 0$$

ונקבל שהפתרונות מקיימים $x, y, z \in \{0, a, -a\}$, כלומר יש 27 נקודות קריטיות.

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4z^2 \end{pmatrix}$$

עבור הנקודה $(0,0,0)$, נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה שלילית לחלוטין ולכן הנקודה $(0,0,0)$ היא נקודת מקסימום.

עבור נקודות מהצורה $(\pm a, 0, 0)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה עם ערך עצמי חיובי ושניים שליליים ולכן הנקודות הן נקודות אוכף.

באופן דומה, גם הנקודות $(0,\pm a,0),(0,0,\pm a)$ הן נקודות אוכף.

עבור נקודות מהצורה $(\pm a,\pm a,0)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה עם ערך עצמי אחד שלילי ושניים חיוביים, ולכן הנקודות הן נקודות אוכף.

באופן דומה, גם הנקודות $(\pm a,0,\pm a),(0,\pm a,\pm a)$ הן נקודות אוכף.

בנקודות מהצורה $(\pm a,\pm a,\pm a)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלו נקודות מינימום.

תרגיל:

מצאו נקודות קיצון מקומיות עבור הפונקציה:

$$f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

האם אלו נקודות קיצון גלובאליות?

פתרון:

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$f_x = 3e^y - 3x^2 = 0$$

$$f_y = 3xe^y - 3e^{3y} = 0$$

נפתור את המשוואות ונקבל את הנקודה $(1,0)$.

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(1,0)$ שלנו:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים שניהם שליליים ולכן זו נקודת מקסימום.

מבחינה גלובאלית, אין לפונקציה נקודות קיצון; הערך בנקודה שלנו הוא:

$$f(1,0) = 2$$

אך למשל בנקודה $(-10,0)$ נקבל את הערך:

$$f(-10,0) = 969 > 2$$

ולכן אין קיצון גלובאליות.

תרגיל:

מצאו את המינימום והמקסימום הגלובאליים של

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y$$

במשולש שקודקודיו הם הנקודות $(0,0),(6,0),(0,6)$.

פתרון:

נעשה זאת בשלבים.

שלב ראשון - נחפש נקודות חשודות בתוך התחום.

שלב שני - נסתכל על הפונקציה שלנו כעל פונקציה של משתנה אחד על כל אחת מהצלעות ונחפש כך נקודות חשודות על הצלעות.

שלב שלישי - גם הקודקודים עצמם חשודים כקיצון (הם ה"קצוות של הקצוות"). נבדוק את כל הנקודות החשודות ונראה מי מהן המקסימום ומי המינימום.

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$f_x = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 2y - x - 2 = 0$$

ונקבל נקודה חשודה - $(2,2)$.
כעת, נתבונן בצלעות המשולש. בצלע $y=0$, נחקור את הפונקציה:

$$f(x,0) = x^2 - 2x$$

נגזור ונשווה ל-0, ונקבל $x=1$, כלומר הנקודה היא $(1,0)$.
באופן דומה, על הצלע $x=0$, נקבל כנקודה חשודה את הנקודה $(0,1)$.
משוואתה של הצלע השלישית היא $y=6-x$, ולכן נחקור את הפונקציה:

$$f(x,6-x) = x^2 + (6-x)^2 - x(6-x) - 2x - 2(6-x)$$

כלומר:

$$f(x,6-x) = 3x^2 - 18x + 24$$

נגזור ונשווה ל־0, ונקבל $x = 3$, כלומר הנקודה $(3,3)$ חשודה.
כמו כן, אמרנו ששלושת הקודקודים הם נקודות חשודות.
נבדוק מה ערך הפונקציה בכל אחת מהנקודות החשודות שלנו:

$$f(0,6) = f(6,0) = 24$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(2,2) = -4$$

$$f(1,0) = f(0,1) = -1$$

$$f(3,3) = -3$$

ולכן $(6,0),(0,6)$ הן נקודות מקסימום גלובאלי והנקודה $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי.