16.12.14 (1)

שיטות נומריות מתקדמות - הרצאה 8

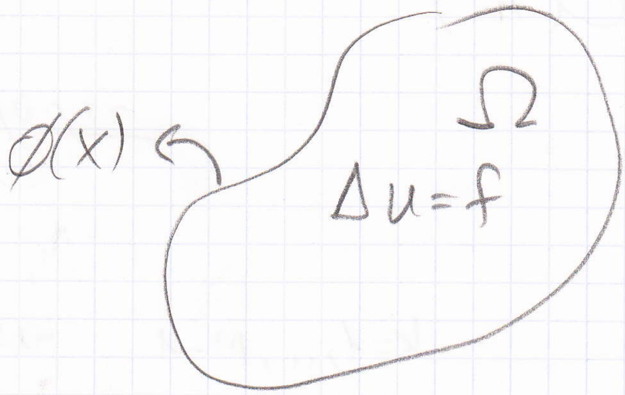
משוואת פואסון

נתון תחום Ω (קומפקטי, חסום וקשיר)

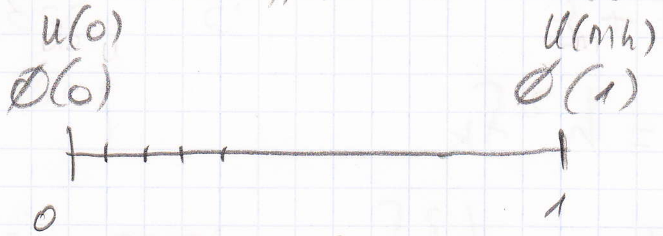
מחפשים $\Delta u = f$ עם תנאי שפה

דיריכלה

$$u(x) = \phi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$



נתחיל במקרה פשוט של מימד 1: (שפה = 2 נק')



$$\Omega = [0,1]$$

נחלק את $[0,1]$ - שריג עם m קטעים שווים

$h = \Delta x = \frac{1}{m}$ המרווח. הפתרון האמיתי $u(kh)$

$k = 0, \dots, m.$

ניצור קירוב לפתרון; נסמנו u_k

תנאי שפה:

$$\begin{cases} u_0 = \phi(0) \\ u_m = \phi(1) \end{cases}$$

במימד 1 המד"ח

$$D^2 u = f$$

נפתח את D^2 באמצעות האופרטורים שלמדנו $\mathcal{E}$, Δ_0, Δ_+ וכו׳... ונקבל קירוב ל-D^2.

נסמן $f_k = f(kh)$.

<u>דוגמא:</u> הפרש מרכזי מספר 2.

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\Delta_0^2 + O(h^2)$$

<u>נפתור:</u>

$$\begin{cases} u_0 = \phi(0) \\ u_m = \phi(1) \\ \frac{1}{h^2}\Delta_0^2 u_k = f_k \end{cases}$$

עבור $k = 1, \dots, m-1$

נזכר כי $\Delta_0^2 = \mathcal{E} - 2I + \mathcal{E}^{-1}$

ולכן $(\mathcal{E} - 2I + \mathcal{E}^{-1})u_k = h^2 f_k$

והמד"ח תהיה: $u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = h^2 f_k$

וזו משוואה לינארית (אוסף משוו׳)

בכתיב מטריציוני

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{נסמן ב-}A} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(0) \\ h^2 f_1 \\ \vdots \\ \phi(1) \end{pmatrix}$$

העברנו בעיית מד"ח לפתרון מערכת משוואות.

16.12.14 (2)

<u>הערה:</u> את הסכמה $u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}=h^2 f_k$

נהוג לכתוב בצורה (בשפה) סטנסיל

$$(1)-(-2)-(1) \quad u_k = h^2 f_k$$

3 - point method

נחשב את הע"ע והו"ע של A. $\quad A-\lambda I$

יש שני ע"ע 1 עם ו"ע e_0, e_m.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

<u>נגדיר:</u>

$$v^\alpha = \begin{pmatrix} v_0^\alpha \\ \vdots \\ v_k^\alpha \end{pmatrix}$$ כאשר $$v_k^\alpha = \sin\left(\frac{k\alpha\pi}{m}\right)$$

$$v^\alpha = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{0\cdot\alpha\cdot\pi}{m}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{m\cdot\alpha\cdot\pi}{m}\right) \end{pmatrix}$$

כ"ל

$\alpha = 1,\dots,m-1$

נראה ש-v^α הוא ו"ע עם ע"ע: $\lambda_\alpha = 4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2m}\right)$

ואז A הפיכה.

זה מגיע מפתרוני של $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u$

$\xRightarrow{\text{פונ' עצמיות}} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{m}\right) \qquad \alpha = 1,2,\dots$

$$A v^\alpha = \begin{pmatrix} v_0^\alpha \\ \\ v_{k-1}^\alpha - 2v_k^\alpha + v_{k+1}^\alpha \\ \\ v_m^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \sin\left(\frac{(k-1)\alpha\pi}{m}\right) - 2\sin\frac{k\alpha\pi}{m} + \sin\left(\frac{(k+1)\alpha\pi}{m}\right) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכל $k=1,\dots,m-1$

נשתמש בנוסחה:

$$\sin(\theta-\psi)+\sin(\theta+\psi)=2\sin\theta\cos\psi$$

$$\theta=\frac{k\alpha\pi}{m}\qquad \psi=\frac{\alpha\pi}{m}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin\theta\cos\frac{\alpha\pi}{m}-2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2v_k^\alpha\left(1-\cos\frac{\alpha\pi}{m}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן v^α הוא ו"ע עם ע"ע $\lambda_\alpha=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{m}\right)$

$\|$

לפי נוסחה לחצי זווית נקבל את הדרוש.

משל

נסמן את השגיאה:

כאשר $e=\begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$

$$e_k=u_k-u(kh)$$

u_k – פתרון מקורב

$u(kh)$ – פתרון אמיתי

נגדיר נורמה $\|\cdot\|_2$.

כך שעבור $v\in\mathbb{R}^{m+1}$

$$\|v\|_2^2=h\sum_{k=0}^{m}v_k^2$$

מתק"י

(כמו הנורמה הרגילה רק מוכפלת ב h)

h מגיע מנרמול לפי אורך, שלא אז נהיה תלוי במימד.

16.12.14 (3)

משפט: עבור $f \in C^4$, קיים קבוע c כך ש

$$\|e\|_2 \le c h^2$$

הוכחה: **הסכימה:**

$$(*) - \begin{cases} u_{k-1} + u_{k+1} - 2u_k = h^2 f_k \\ \text{נפעיל את הסכימה על הפתרון המדויק} \\ u((k-1)h) + u((k+1)h) - 2u(kh) + O(h^4) = h^2 f_k \end{cases}$$

מסימטריות לפי טיילור.

(*) נחסר ונקבל

$$e_{k-1} + e_{k+1} - 2e_k + O(h^4) = 0$$

לכן ניתן לכתוב

$$Ae = \delta = O(h^4)$$

A הפיכה

$$\Rightarrow e = A^{-1}\delta \Rightarrow \|e\|_2 = \|A^{-1}\delta\| \le \|A^{-1}\|_2 \|\delta\|_2$$

הערה:

$\|A^{-1}\|_2 =$ ע"ע הכי גדול של A^{-1} (בערך מוחלט) $= \dfrac{1}{\text{ע"ע הכי קטן של } A \text{ (בערך מוחלט)}}$ (1 חלקי)

A ע"ע $= \lambda_\alpha = +4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{2M}\right) \quad \alpha = 1, 2, \dots, M-1$

הכי קטן ב $M-1$ או $\alpha = 1$

$$|\lambda_1| = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}h\right) = O(h^2)$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\| \underset{\text{1 חלקי}}{=} O(h^{-2})$$

$$\|\delta\|_2^2 = h\sum_k \delta_k^2 = h\cdot \underbrace{\sum_{1/h} O(h^8)}_{O(h^7)} = O(h^8)$$

$$\Rightarrow \|\delta\|_2 = O(h^4)$$

בסה״כ

$$\|e\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|\delta\|_2 = O(h^{-2})\cdot O(h^4) = O(h^2)$$

כלומר קיים קבוע c כך ש:

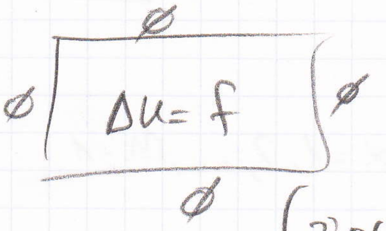
$$\boxed{\|e\|_2 \le c h^2}$$

מ.ש.ל

כאן אם השגיאה הלוקאלית מסדר 1 אז היא תכריע את השגיאה הגלובלית להיות גם מסדר 1.

נפתור כעת בשני ממדים 2D

משוואת פואסון במלבן $[0,1]^2$



$$\Delta u = f$$
$$u(x) = \emptyset(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

נגדיר שריג דו מימדי (שריג אחיד)

$$x_{k,l} = (k\Delta x, l\Delta y)$$

אם השריג הוא $m\times m$ ניתן להגדיר $h=\frac{1}{m}$

$$x_{k,l} = (kh, lh)$$

16.12.14 (4)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{h^2}\left(\Delta_{0,x}^{2}+\Delta_{0,y}^{2}\right)+O(h^2)$$

קירוב לנגזרת

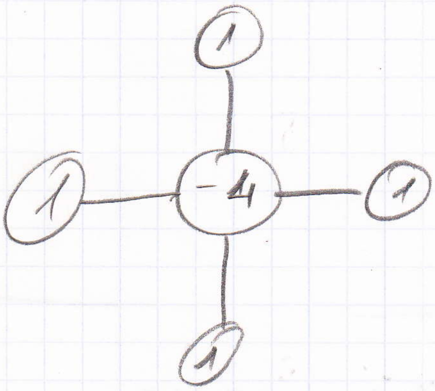
נפתור:

$$\Delta_{0,x}^2 u+\Delta_{0,y}^2 u=h^2 f+O(h^4)$$

נסמן ב- $U_{k,l}$ את הקירוב של $u(x_{k,l})$

$$\Rightarrow U_{k+1,l}-2U_{k,l}+U_{k-1,l}+U_{k,l+1}-2U_{k,l}+U_{k,l-1}=h^2 f_{k,l}$$

קיבלנו בצורת סטנסיל



$U_{k,l}=h^2 f_{k,l}$

5-point formula

העברנו את הבעיה למערכת משוואות של $(m+1)^2$ משוואות ונעלמים.

$$\begin{pmatrix} \text{5 איברים שונים מ-0 בכל שורה} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f,\varnothing \end{pmatrix}$$

u

תלוי בתנאי השפה

$A\in M_{m+1}$

בנויה

מטריצה דלילה, רובה אפסים. (נשלט ע"י האלכסון)

ע"ע:

$$\lambda_{\alpha,\beta}=-4\left[\sin^2\frac{\alpha\pi}{2m}+\sin^2\frac{\beta\pi}{2m}\right]$$

עם ו"ע

$$v_{k,l}^{\alpha,\beta} = \sin\left(\frac{k\alpha\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{l\beta\pi}{m}\right)$$

$$\alpha,\beta = 1,\dots,m-1$$

$4m$ ע"ע 1.

$$(m+1)^2 = \underbrace{(m-1)^2}_{\lambda_{\alpha,\beta}} + \underbrace{4m}_{1}$$

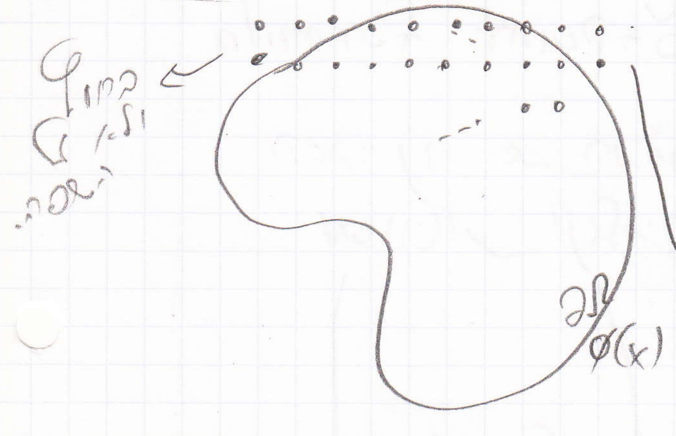
כולן שונות מ0 ולכן המטריצה הפיכה.

<u>משפט:</u> הסכימה מתכנסת כאשר $\|e\|_2 < Ch^2$

כאשר $e_{k,l} = u_{k,l} - u(x_{k,l})$

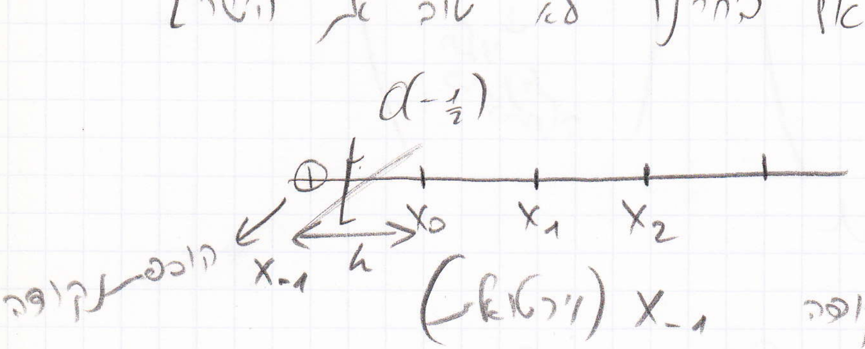
$$e = h^2 \sum_{k,l=0}^{m} e_{k,l}$$

לנרמל במימד שני.



<u>בעיה:</u> אם התחום יהיה ולא <u>נצליח</u> להתאים שריג לנקודות בשפה, ז"א לא נפגע בחלק מהשפה. שלא כמו במלבן.

או במימד 1 אם בחרנו לא טוב את השריג



<u>הפתרון:</u> נוסיף נקודה x_{-1} (וירטואלית)

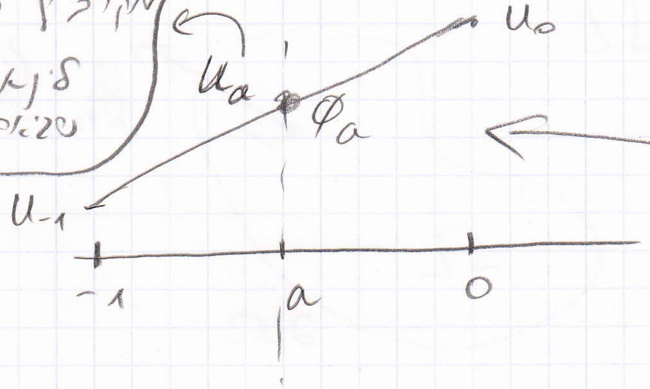
נ"ח הסכימה מספר 2. גם תנאי השפה צריך להתקיים עם דיוק h^2.

16.12.14 (5)

נתון תנאי שפה $\phi(a)=\phi_a$

נעשה (צורך-אין)

מקרבים ע"י אינטר-פולציה לינארית שגיאה h^2



$$u_{-1}\lambda+(1-\lambda)u_0$$

$\boxed{\lambda=-a}$ אם $a<0$.

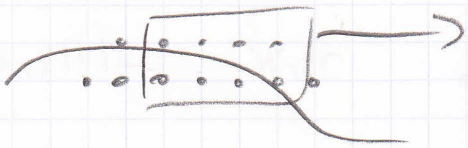
$$-a u_{-1}+(1+a)u_0=\phi_a$$

$$\Rightarrow\quad u_{-1}=\frac{1+a}{a}u_0-\frac{1}{a}\phi_a$$

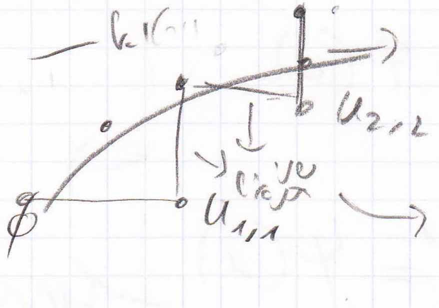
$u_{-1}-2u_0+u_1=h^2f_0$ u_0 נתונה ע"י המפ"ח (הוספנו משוואה.)

לקירוב u_a שפה שמאלית

בשני מימדים זה קצת יותר מסובך



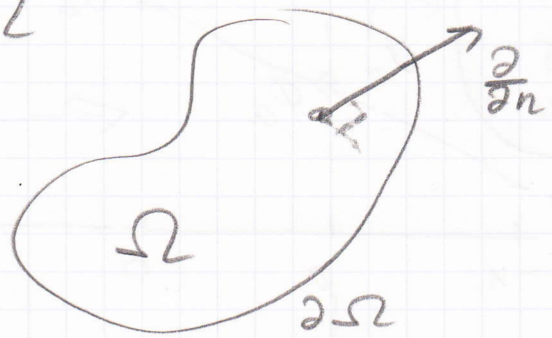
אינטרפולציה ע"י מישור



בסה"כ אנחנו מוסיפים משוואות לינאריות כדי לקיים את תנאי השפה.

תנאי שפה נוימן:

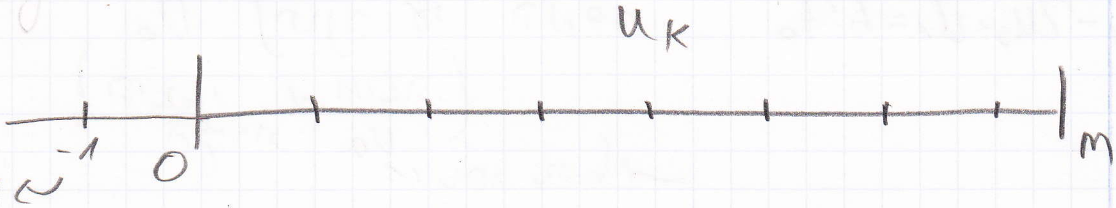
$$\begin{cases} \Delta u = f & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \phi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



מאונך לשפה

במימד 1

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = f & x \in [0,1] \\ \frac{du}{dx}(0) = \psi(0) \\ \frac{du}{dx}(1) = \psi(1) \end{cases}$$



וירטואלי

$k = 1, \dots, m-1$: $u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = h^2 f_k$

צריך משוואות עבור u_0 ו- u_m ?

u_0, u_m נתונים ע״י הגדרה

שיטה 1: ב-0:

$$\begin{cases} \frac{u_1 - u_0}{h} = \psi(0) \\ \frac{u_m - u_{m-1}}{h} = \psi(1) \end{cases}$$

סדר של ט 1 זה $O(h)$ ולכן השגיאה הגלובלית היא $O(h)$, ובגלל השפה איבדנו בשגיאה.

שיטה 2: אלטרנטיבה - קירוב מסדר גבוה יותר ע״י $\Delta_\pm$

שיטה 3: - הוספת נק׳ וירטואלית

16.12.14 6

$$\begin{cases} \psi(0) = \dfrac{u_1 - u_{-1}}{2h} \\ \psi(1) = \dfrac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} \end{cases}$$

סדר h^2: (הפרש מרכזי)

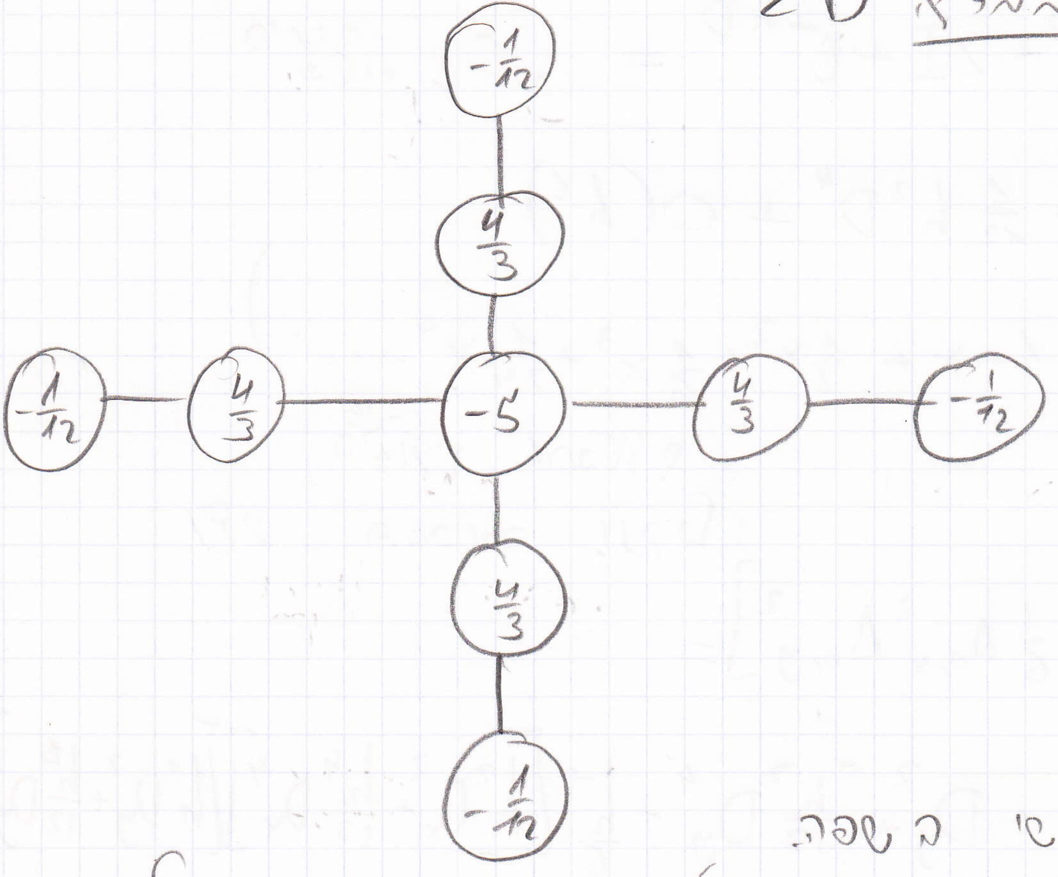
שיטה מסדר גבוה

h^4 (הוספה-קידום) (Δ_0^4 לוקח 2 שמאלה 2 ימינה)

במימד 1: 1D

$u_k = h^2 f_k$

בשני מימדים: 2D

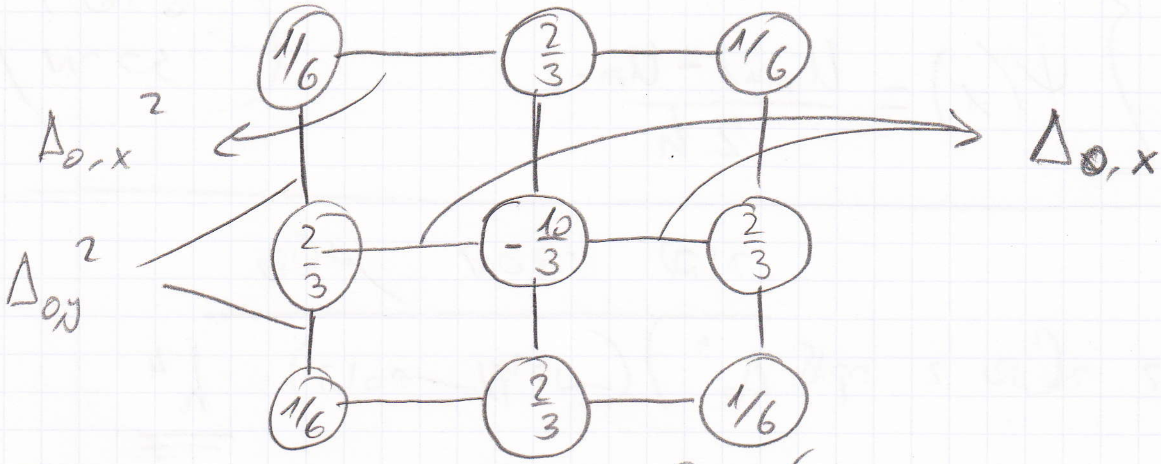


$u_k = h^2 f_k$

כאן יש קושי בשפה.
נצטרך דרך אחרת שטובה למימד 2 ומעלה
ולא למימד 1.

גישה שונה:

$$h^{-2}\left(\Delta_{0,x}^2+\Delta_{0,y}^2+\frac{1}{6}\Delta_{0,x}^2\cdot\Delta_{0,y}^2\right)u_{k,l}=h^2 f_{k,l}$$



נפתח את הסדר של השגיאה:

$$\Delta_0=\mathcal{E}^{1/2}-\mathcal{E}^{-1/2}$$

$$\Delta_0^2=\mathcal{E}-2I+\mathcal{E}^{-1}\quad;\quad \mathcal{E}=e^{hD}$$

$$\Rightarrow\ \Delta_0^2=e^{hD}-2I+e^{-hD}=$$ פיתוח בטור טיילור

$$=h^2D^2+\frac{1}{12}h^2D^4+O(h^6)$$

$$\left(e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\dots\right)$$

האי-זוגיים מתבטלים

נציב בסכימה ונקבל:

$$h^{-2}\left[\Delta_{0,x}^2+\Delta_{0,y}^2+\frac{1}{6}\Delta_{0,x}^2\Delta_{0,y}^2\right]=$$

$$=D_x^2+\frac{h^2}{12}D_x^4+D_y^2+\frac{h^2}{12}D_y^4+\frac{h^{-2}}{6}\left[h^2D_x^2+\frac{h^4}{12}D_x^4\right]\left[h^2D_y^2+\frac{h^4}{12}D_y^4\right]$$

$$+O(h^4)=\left(D_x^2+D_y^2\right)+h^2\underbrace{\left(\frac{1}{12}D_x^4+\frac{1}{12}D_y^4+\frac{1}{6}D_x^2D_y^2\right)}_{\frac{1}{12}\left(D_x^2+D_y^2\right)^2}+O(h^4)$$

16.12.14 ד

$$\overbrace{\nabla^2=\Delta}^{}\ \text{מסומן}$$

$$= D_x^2 + D_y^2 + \underbrace{\frac{h^2}{12}\overbrace{\left(D_x^2+D_y^2\right)^2}^{\Delta^2=\nabla^4}}_{} + O(h^4)$$

מהשגיאה (חיבור של הקירוב) שאר המחובר השני שהם מספר 2.

- אם המשוואה היתה קצת שונה:

$$\left(\Delta + \frac{h^2}{12}\Delta^2\right)u = f$$

אז הסכימה היתה מספר 4.

משוואה זו נקראת modified equation

מרישום אחר:

$$\underbrace{\left(I + \frac{h^2}{12}\Delta\right]}_{}\Delta u = f$$

עבור h מספיק קטן
ולכן האופרטור הפיך

(נכפיל בהפכי שלו)

$$\Delta u = \left[I + \frac{h^2}{12}\Delta\right]^{-1} f$$

נזרוק אותו ב-h^4 ע"י פיתוח טיילור

$$\frac{1}{1+\frac{h^2}{12}x} = 1 - \frac{h^2}{12}x + O(h^4)$$

$$\Delta u = \left[I - \frac{h^2}{12}\Delta\right] f + O(h^4)$$

נרצה לקרב עם שגיאה h^2 (ע"י הפרש מרכזי)

$$= \left[I - \frac{h^2}{12}\Delta_0^2\right] f + O(h^4)$$

$$\Delta u = \left[I + \frac{h^2}{12}\Delta_0^2\right]^{-1} f$$

נפתור משוואה אחרת שה modified eqn.

שה היא $\Delta u = f$, המשוואה האחרת:

$$\Delta u = \left[I + \frac{h^2}{12}\Delta_0^2\right] f$$

אותה נפתור בעזרת הסטנסיל לקבל פתרון מסדר 4 למשוואה $\Delta u = f$.

הסטנסיל יהיה כזה:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} u_{k,l} = h^2\left(1 + h^2 \cdot \begin{bmatrix} & \frac{1}{12} & \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ & \frac{1}{12} & \end{bmatrix}\right) f_{k,l}$$

זו שיטה מסדר 4 עבור $\Delta u = f$

- לשיטה זו אין בעיה בתנאי השפה.