פתרון לשאלה 4 סעיף ד'

עבור $\alpha<0$: נבצע מבחן השוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\ln x|^{\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,|\ln x|^{\alpha}=0$$

כעת ידוע $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס ולכן גם האינטגרל בשאלה מתכנס.

עבור $\alpha=0$: ברור כי האינטגרל מתכנס.

עבור $\alpha>0$: נחלק לשני אינטגרלים

$$\int_0^1|\ln x|^{\alpha}dx=\int_0^{\frac12}|\ln x|^{\alpha}dx+\int_{\frac12}^1|\ln x|^{\alpha}dx$$

מתכנס! אינטגרל רגיל סופי בלי נק' אי-רציפות (הכי אני במקרה ש- $\alpha>0$)

ניתן לבדוק מה קורה עבור האינטגרל השני

פה יש רק נקודה בעייתית אחת $x=1$.

נבצע מבחן השוואה עם $\frac{|\ln x|^{\alpha}}{x}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|\ln x|^{\alpha}}{\frac{|\ln x|^{\alpha}}{x}}=\lim_{x\to 1^-}x=1$$

כלומר, הם חברים ולכן נבדוק את:

$$\int_{\frac12}^1\frac{|\ln x|^{\alpha}}{x}dx\underset{\downarrow}{=}\int_{\ln\frac12}^{\ln 1}t^{\alpha}=\int_{\ln\frac12}^{0}t^{\alpha}=-\int_0^{\ln\frac12}t^{\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned}t&=-\ln x\\ dt&=-\frac{1}{x}dx\end{aligned}}$$

אצלנו $\alpha>0$

ולכן ~~[illegible]~~

האינטגרל מתכנס עבור $\boxed{\alpha>-1}$