אינפי 4 תרגול 5

29 באפריל 2015

חישוב שטח (תכולה) של משטח k מימדי

יהי M משטח k מימדי ב$-\mathbb{R}^n$, הנתון ע"י $F(x_1,\dots,x_k)=(f_1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_n(x_1,\dots,x_k))$.

כדי לחשב שטח של משטח k מימדי, נחלק אותו לקוביות קטנות, ששטחה של כל אחת מהן הוא h^k (וצלעותיה באורך h).

כל קוביה כזו נעביר בעזרת העתקת הדיפרנציאל אל המישור המשיק למשטח בנקודה כלשהי, כלומר אם יש לנו תיבה Q_i נתבונן בתמונתה תחת dF_{q_i} (העברה מנקודה בקוביה לנקודה על המישור המשיק).

אם נסכם את השטחים ה$-k$ מימדיים של כל התמונות של כל הקוביות, בהנחה שהקוביות הופכות קטנות יותר ויותר ($h\to 0$), נקבל הערכה של שטח המשטח כולו.

אם כן, איך מחשבים את שטחה של תמונת קוביה?

נסמן $p_i=dF_{q_i}(Q_i)$. זהו מקבילון הנוצר ע"י הוקטורים:

$$h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_k}$$

נזכור (למרות שאף פעם לא ראינו את זה) ששטחו של מקבילון p שנוצר ע"י הוקטורים $v_1,\dots,v_k$ הוא:

$$Vol(p)=\sqrt{\det(A^T\cdot A)}$$

כאשר A היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים $v_1,\dots,v_k$.

במקרה שלנו, נסמן ב$-A_i$ את המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים $h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_k},\dots,h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}$,
ונקבל שהשטח ה$-k$ מימדי של המקבילון p_i הוא:

$$\sqrt{\det(A_i^T\cdot A_i)}$$

אבל המטריצה הזו היא בדיוק מטריצת יעקובי שכל שורה שלה מוכפלת ב$-h$.
לכן, במטריצה $A_i^T\cdot A_i$ כל שורה מוכפלת ב$-h^2$, ויש בה k שורות. כפל שורה בקבוע מכפיל את הדטרמיננטה באותו הקבוע, ולכן:

$$\sqrt{\det(A^T\cdot A)}=\sqrt{\det(h\cdot J^T(q_i)\cdot h\cdot J(q_i))}=\sqrt{h^{2k}\det(J^T(q_i)\cdot J(q_i))}=h^k\sqrt{\det(J^T(q_i)\cdot J(q_i))}$$

אם נסכם את כל השטחים מהצורה הזו נקבל שהשטח ה$-k$ מימדי של המשטח הוא בערך:

$$V(M)\approx\sum_{i=1}^{p}V(Q_i)\cdot\sqrt{\det(J^T(q_i)\cdot J(q_i))}$$

מכיוון ש$-V(Q_i)=h^k$. לכן, אם נרצה להגדיר את השטח במדויק, נקבל:

$$V(M)=\iint\sqrt{\det(J^T\cdot J)}d\underline{x}$$

על התחום המתאים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח הפנים של ספירה עם רדיוס a.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הספירה היא:

$$F(\theta,\varphi)=(a\sin\varphi\cos\theta,a\sin\varphi\sin\theta,a\cos\varphi)$$

כאשר $(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

נחשב ונקבל:

$$\sqrt{\det(J^T(\theta,\varphi)\cdot J(\theta,\varphi)} = a^2\sin\varphi$$

ולכן שטח הפנים של הספירה יהיה:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\varphi d\varphi d\theta = 4\pi a^2$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את השטח ה-1 מימדי של עקומה גזירה ברציפות $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

<u>פתרון:</u>

המסילה שלנו היא מהצורה:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t))$$

לכן:

$$J^T = \gamma'(t) = (\gamma_1',\ldots,\gamma_n')$$

ולכן:

$$J^T\cdot J = (\gamma_1')^2+\ldots+(\gamma_n')^2 = \|\gamma'(t)\|$$

ולפי הנוסחה:

$$V = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

וזהו אורך העקומה, כצפוי.

שטח של משטח דו מימדי ב$-\mathbb{R}^3$.

אם המשטח שלנו הוא משטח דו מימדי ב$-\mathbb{R}^3$, אפשר לחשב את אלמנט השטח של המשטח ע"י מכפלה וקטורית.

כלומר, במקום לקחת את $\sqrt{\det(J^T \cdot J)}$, ניקח את $\|F_u \times F_v\|$ כאשר F הפרמטריזציה של המשטח.

מכפלה וקטורית של שני וקטורים $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ ניתנת לחישוב ע"י:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i(u_2v_3 - v_2u_3) - j(u_1v_3 - v_1u_3) + k(u_1v_2 - v_1u_2) =$$

$$= (u_2v_3 - v_2u_3, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2)$$

אפשר להכליל את המכפלה למימדים יותר גבוהים, אך זה כבר סיפור אחר ויסופר בפעם אחרת.

כמה תכונות של המכפלה הוקטורית על קצה המזלג:

1. אנטי־קומוטטיביות: $u \times v = -v \times u$ (חשבו איך אפשר לראות זאת בעזרת הדטרמיננטה).
2. אין אסוציאטיביות: $u \times (v \times w)$ לא בהכרח שווה ל$-(u \times v) \times w$. לכן, לביטוי $u \times v \times w$ אין משמעות.
3. דיסטריביוטיביות: $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.
4. הומוגניות: $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$.
5. $u \times (v \times w) = v(u \cdot w) - w(u \cdot v)$.
6. זהות יעקובי: $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח הפנים של החרוט הנתון ע"י:

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$$

כאשר $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את וקטורי הנגזרות החלקיות:

$$\phi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

$$\phi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

ולכן:

$$\phi_r \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = i(-r\cos\theta) - j(r\sin\theta) + k(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) =$$

$$= (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)$$

והשטח יהיה:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|\phi_r \times \phi_\theta\| \, d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} r d\theta dr =$$

$$\sqrt{2} \cdot 2\pi \int_0^1 r dr = \sqrt{2}\pi$$

הערה:

אם המשטח שלנו נתון להטלה, למשל על מישור xy (כלומר מהצורה $z = f(x,y)$), פרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

ואז: $\phi_x = (1,0,f_x), \phi_y = (0,1,f_y)$ ולכן:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

ולכן השטח יהיה:

$$V = \iint \|\phi_x \times \phi_y\| \, dxdy = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

באופן דומה, כאשר המשטח ניתן להטלה על מישור xz אלמנט השטח יהיה $\sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}$ וכאשר המשטח ניתן להטלה על מישור yz אלמנט השטח יהיה $\sqrt{1 + f_z^2 + f_y^2}$.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את השטח של חלק מהמשטח $x = y^2 + z^2$ שנמצא בתוך הגליל $y^2 + z^2 = 9$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה על מישור yz, כאשר $x = f(y,z) = y^2 + z^2$. לכן, ההצגה הפרמטרית תהיה:

$$\phi(y,z) = (y^2 + z^2, y, z)$$

ואלמנט השטח יהיה: $\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}$. אם כן, השטח הוא:

$$V = \iint \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz =$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$y = r\cos\theta$$

$$z = r\sin\theta$$

כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 3$. היעקוביאן הוא r. כעת:

$$V = \iint \sqrt{1+4y^2+4z^2}dydz = \int_0^3\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta}rd\theta dr = \int_0^3\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2}rd\theta dr =$$

$$= 2\pi\cdot(\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{8})|_0^3 = \frac{\pi}{6}(37^{\frac{3}{2}}-1)$$