מתמטיקה בדידה

משפטים למבחן

קיץ 2014

ערן רכס

גרסה מעודכנת

רשימת משפטים לבחינה

1. אם $|A|=n$ אז $P(A)=2^n$. (כאשר A סופית).
2. אם R יחס שקילות על A, אזי $\{[a]_R | a\in A\}$ חלוקה של A.
3. היחס המושרה ע"י החלוקה הוא יחס שקילות.
4. בקבוצה סדורה חלקית אם קיים איבר קטן ביותר הוא יחיד, ביחס סדר מלא איבר הוא מינימאלי אם ורק אם הוא קטן ביותר.
5. אם f,g פונקציות חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע. אם f,g פונקציות על אז $f\circ g$ על.
6. פונקציה הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.
7. קבוצה חלקית לקבוצה בת מניה היא בת מניה.
8. $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$ - האלכסון של קנטור.
9. הקטע הפתוח $(0,1)$ אינו בן מניה.
10. אם לכל $n\in\mathbb{N}$ A_n בת מניה אז $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ קבוצה בת מניה.
11. משפט קנטור - $|A|\neq|P(A)|$.
12. משפט קנטור ברנשטיין.
13. הגדרת העוצמה של קבוצת הפונקציות מ A ל B מוגדרת היטב. ז"א אם $|A|=|C|,|B|=|D|$ אז $|B^A|=|D^C|$.
14. $\aleph=2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$.
15. לכל קבוצה A $|P(A)|=2^{|A|}$.
16. אם k_1,k_2,k_3 עוצמות אז $(k_1\cdot k_2)^{k_3}=k_1^{k_3}\cdot k_2^{k_3}$.
17. משפט השוואת עוצמות.
18. משפט המכפלה.

משפט: אם $|A| = n$ אז $P(A) = 2^n$ (כאשר A סופית).

הוכחה: נוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 0$ מתקיים $A = \emptyset \implies P(A) = \{\emptyset\}$ ובאמת

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^0 = 1$$

הנחת האינדוקציה: נניח שעבור $|A| = n > 0$ מתקיים ש-$P(A) = 2^n$.

צעד האינדוקציה: צריך להוכיח שעבור $|B| = n + 1$ מתקיים ש-$P(B) = 2^{n+1}$.

נבחר איבר $x \in B$. נסמן:

$$P_1(B) = \{C | C \subseteq B \land x \notin C\}$$

$$P_2(B) = \{C | C \subseteq B \land x \in C\}$$

על פי עקרון הסכום בקומבינטוריקה מתקיים:

$$|P(B)| = |P_1(B)| + |P_2(B)|$$

נשים לב ש-$P_1(B) = P(B \backslash \{x\})$.

ב-$B \backslash \{x\}$ יש n איברים ולכן לפי הנחת האינדוקציה:

$$|P_1(B)| = |P(B \backslash \{x\})| = 2^n$$

אם לכל איבר ב-$P_1(B)$ נוסיף את x נקבל איבר ב-$P_2(B)$.

בכיוון השני, אם נוציא את x מאיבר של $P_2(B)$ נקבל איבר ב-$P_1(B)$.

לכן:

$$|P_1(B)| = |P_2(B)| = 2^n$$

ומכאן נקבל:

$$|P(B)| = |P_1(B)| + |P_2(B)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

כנדרש.

■

משפט: אם R יחס שקילות על A, אזי $\{[a]_R | a \in A\}$ חלוקה של A.

הוכחה: חלוקה של A הן אוסף קבוצות $\{A_i\}_{i\in I}$ כך ש:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A \ (1) \qquad \forall i \neq j \in I: A_i \cap A_j = \emptyset \ (2)$$

נוכיח ש-$\{[a]_R | a \in A\}$ חלוקה.

(1) יהא $a \in A$. R יחס שקילות ולכן רפלקסיבי, ומכאן שעל פי ההגדרה $a \in [a]_R$ שהרי $(a,a) \in R$. לכן:

$$a \in \bigcup_{a\in A} [a]_R$$

מכאן ש-$A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_R$.

לפי ההגדרה $\bigcup_{a\in A}[a]_R \subseteq A$, ולכן בסך הכל נקבל מהכלה דו-כיוונית $\bigcup_{a\in A}[a]_R = A$ כנדרש.

(2) נוכיח שלכל $a, b \in A$ מתקיים $[a]_R = [b]_R$ או $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.
נחלק למקרים:

- אם aRb: יהי $x \in [a]_R$, לכן לפי ההגדרה xRa.
  R יחס שקילות ולכן טרנזיטיבי, ומכאן ש-xRb.
  לכן על פי ההגדרה $x \in [b]_R$.
  $\Leftarrow [a]_R \subseteq [b]_R$.
  בכיוון השני ההכלה זהה ולכן $[a]_R = [b]_R$.

- אם $(\neg aRb)$: נניח בשלילה ש-$[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.
  לכן קיים $x \in [a]_R \cap [b]_R$.
  $\Leftarrow x \in [a]_R \wedge x \in [b]_R$ ולכן $xRa \wedge xRb$ לפי ההגדרה.
  R יחס שקילות ולכן סימטרי, ומכאן ש-$aRx \wedge xRb$.
  מטרנזיטיביות היחס R נקבל ש-aRb בסתירה.

$$\Downarrow$$

הקבוצות זרות בזוגות כנדרש (שהרי הן שוות או זרות).

לכן הוכחנו שזוהי חלוקה.

■

<u>משפט:</u> היחס המושרה על ידי החלוקה הוא יחס שקילות.

<u>הוכחה:</u> בהינתן חלוקה $\{A_i\}_{i\in I}$ נגדיר יחס: $R=\{(a,b)|\exists i\in I: a,b\in A_i\}$.

יחס זה הוא היחס $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$.

<u>נוכיח ש-R יחס שקילות:</u>

<u>רפלקסיביות:</u> יהי $a\in A$. כיוון ש-$\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה מתקיים $\bigcup_{i\in I}A_i=A$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש-$a\in A_i$. מכאן שעל פי הגדרת היחס R מתקיים $(a,a)\in R$ כנדרש.

<u>סימטריות:</u> נתון ש-$(a,b)\in R$. <u>צ.ל:</u> $(b,a)\in R$.

על פי ההגדרה, אם $(a,b)\in R$ אזי קיים $i\in I$ כך ש-$a,b\in A_i$.

לכן גם $b,a\in A_i$- ומכאן ש-$(b,a)\in R$ כנדרש.

<u>טרנזיטיביות:</u> נתון ש-$(a,b),(b,c)\in R$. <u>צ.ל:</u> $(a,c)\in R$.

על פי ההגדרה, אם $(a,b),(b,c)\in R$ אזי קיימים $i,j\in I$ כך ש-$a,b\in A_i$ וכן $b,c\in A_j$.

על פי הגדרת החלוקה $A_i\cap A_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$, אבל $b\in A_i\cap A_j$ ולכן בהכרח $i=j$. מכאן ש-$a,c\in A_i$ ולכן על פי הגדרת היחס $(a,c)\in R$ כנדרש.

$\Downarrow$

R יחס שקילות.

■

<u>מסקנה:</u> קיימת **התאמה** בין יחסי שקילות על קבוצה A לבין החלוקות של קבוצה A.

$\{A \text{ חלוקות של}\} \leftrightarrow \{A \text{ יחסי שקילות על}\}$

משפט: בקבוצה סדורה חלקית אם קיים איבר קטן ביותר הוא יחיד, ביחס סדר מלא איבר הוא מינימאלי אם ורק אם הוא קטן ביותר.

הוכחה: חלק א': בקבוצה סדורה חלקית אם קיים איבר קטן ביותר הוא יחיד.

תהא $(A, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ויהיו $a, b \in A$ שני איברים קטנים ביותר הנמצאים בה.

צ.ל: $a = b$.

a איבר קטן ביותר ולכן $\forall x \in A: a \leq x$, בפרט $a \leq b$.

באותו אופן, b איבר קטן ביותר ולכן $\forall x \in A: b \leq x$, בפרט $b \leq a$.

קיבלנו ש-$a \leq b \ \wedge b \leq a$ ולכן בגלל ש-$\leq$ אנטי-סימטרי נקבל ש-$a = b$ כנדרש.

לכן בקבוצה סדורה חלקית קיים איבר קטן ביותר יחיד.

חלק ב': ביחס סדר מלא איבר הוא מינימאלי אם ורק אם הוא קטן ביותר.

תהא $(A, \leq)$ קבוצה סדורה מלאה.

$\Leftarrow$ נתון $a \in A$ איבר מינימלי. צ.ל: a איבר קטן ביותר.

יהא $x \in A$ איבר בקבוצה. היחס $\leq$ הוא יחס סדר מלא, ולכן $a \leq x$ או $x \leq a$.

אם $a \leq x$, אזי אין בעיה כי אז a הוא האיבר הקטן יותר.

אם $x \leq a$, אזי בגלל ש-a איבר מינימלי מתקיים $a = x$ על פי ההגדרה.

לכן בסך הכל $\forall x \in A: a \leq x$ ולכן a איבר קטן ביותר.

$\Rightarrow$ נתון $a \in A$ איבר קטן ביותר. צ.ל: a איבר מינימלי.

a איבר קטן ביותר ולכן $\forall x \in A: a \leq x$. יהא $y \in A$ כך ש-$y \leq a$.

בגלל ש-a איבר קטן ביותר מתקיים $a \leq y$, כלומר בסך הכל -$a \leq y \ \wedge y \leq a$ ולכן בגלל שהיחס $\leq$ אנטי-סימטרי נקבל ש-$a = y$.

במילים אחרות מתקיים ש-$\forall y \in A: y \leq a \longrightarrow y = a$. זוהי בדיוק ההגדרה של איבר מינימלי ולכן a איבר מינימלי כנדרש.

■

משפט: אם f,g פונקציות חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע.

הוכחה: נניח $f\circ g(x)=f\circ g(y)$. צ.ל: $x=y$.

על פי ההגדרה נקבל ש-$f(g(x))=f(g(y))$.

f חח"ע ולכן נקבל ש-$g(x)=g(y)$.

g חח"ע ולכן נקבל ש-$x=y$ כנדרש.

■

משפט: אם f,g פונקציות על אז $f\circ g$ על.

הוכחה: נניח $f\colon B\longrightarrow C$, $g\colon A\longrightarrow B$.

צ.ל: $\forall y\in C\ \exists x\in A\colon f\circ g(x)=y$.

f על ולכן $\forall y\in C\ \exists z\in B\colon f(z)=y$.

g על ולכן $\forall z\in B\ \exists x\in A\colon g(x)=z$.

לכן בסך הכל $\forall y\in C\ \exists x\in A\colon f\circ g(x)=y$ כנדרש.

■

<u>משפט:</u> פונקציה הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

<u>הוכחה:</u> תהא $f: A \longrightarrow B$ פונקציה.

$\Leftarrow$ נתון ש-f הפיכה. <u>צ.ל:</u> f חח"ע ועל.

f הפיכה ולכן על פי ההגדרה קיימת $g: B \longrightarrow A$ כך שמתקיים:

$$g \circ f = I_A$$

$$f \circ g = I_B$$

כאשר I_A, I_B הן פונקציות הזהות.

I_A היא חח"ע ולכן f חח"ע, I_B היא על ולכן f על.

לכן בסך הכל f חח"ע ועל.

$\Rightarrow$ נתון ש-f חח"ע ועל. <u>צ.ל:</u> f הפיכה.

נבנה $g: B \longrightarrow A$ הופכית. יהא $b \in B$. קיים $a \in A$ יחיד כך ש-$f^{-1}[\{b\}] = \{a\}$

(קיים בגלל ש-f על, יחיד בגלל ש-f חח"ע).

נגדיר $g(b) = a$.

g היא פונקציה.

<u>מלאות:</u> הגדרנו את התמונה לכל $b \in B$.

<u>חד-ערכיות:</u> לפי הגדרת g הנ"ל התאמנו ל-$b \in B$ רק איבר יחיד.

מתקיים:

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

נסמן $b = f(a)$ ונקבל $g \circ f(a) = g(b)$, אבל $f^{-1}[\{b\}] = \{a\}$ ולכן לפי הגדרת g מתקיים $g \circ f(a) = a$.

באותו אופן $f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b$ על פי ההגדרה של g ולכן מתקיים:

$$g \circ f = I_A$$

$$f \circ g = I_B$$

מכאן ש-f הפיכה ו-g היא ההופכית שלה כנדרש.

■

<u>משפט:</u> קבוצה חלקית לקבוצה בת מניה היא בת מניה.

<u>הוכחה:</u> תהא B קבוצה בת-מניה, וכן $A \subseteq B$ תת קבוצה שלה.

אם A סופית אזי ברור ש-A בת-מניה וסיימנו.

אחרת, מספיק להוכיח את הטענה עבור תת-קבוצה של $\mathbb{N}$.

תהא $C \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה אינסופית. נגדיר פונקציה $f: C \longrightarrow \mathbb{N}$ כך:

לכל $x \in C$

$$f(x) = |\{y \in C | y \leq x\}|$$

כלומר הפונקציה מחזירה את מספר האיברים ב-C שקטנים-שווים ל-x.

<u>חח"ע:</u> נניח $f(a) = f(b)$. <u>צ.ל:</u> $a = b$.

בהג"כ נניח ש-$a \leq b$. נקבל $\{y \in C | y \leq a\} \subseteq \{y \in C | y \leq b\}$ שהרי אם $y \leq a$ הוא גם בהכרח מקיים $y \leq b$ שהרי $a \leq b$.

מהנתון ומההכלה שהוכחנו אנו יודעים שחייב להתקיים שוויון, ולכן גם:

$\{y \in C | y \leq b\} \subseteq \{y \in C | y \leq a\}$.

מתקיים $b \in \{y \in C | y \leq b\}$ שהרי $b \leq b$, ולכן גם $b \in \{y \in C | y \leq a\}$, כלומר $b \leq a$.

בסך הכל קיבלנו ש-$a \leq b \ \wedge b \leq a$ ולכן מאנטי-סימטריות נקבל ש-$a = b$ כנדרש.

<u>על:</u> נראה באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \in C$ כך ש-$f(x) = n$.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n = 1$, יהא $c_1 \in C$ האיבר הקטן ביותר ב-C, ולכן $f(c_1) = 1$.

<u>הנחת האינדוקציה:</u> נניח שלכל $n \leq k \in \mathbb{N}$ יש מקור.

<u>צעד האינדוקציה:</u> <u>צ.ל:</u> ל-$n = k + 1$ יש מקור.

נסמן $D = \{b | f(b) \leq k\}$.

בקבוצה $C \backslash D$ עדין יש אינסוף איברים, ולכן קיים בה איבר קטן ביותר (כי ב-D יש מספר סופי של איברים בגלל ש-f חח"ע).

יהי $b \in C \backslash D$ האיבר הקטן ביותר בקבוצה.

לפי הנחת האינדוקציה $|D| = |\{b | f(b) \leq k\}| = k$.

מתקיים:

$$f(b) = |\{y \in C | y \leq b\}| = |D \cup \{b\}| = |D| + |\{b\}| = k + 1$$

כנדרש.

$$\Downarrow$$

f חח"ע ועל ולכן $C \sim \mathbb{N}$.

B בת-מניה ולכן קיימת $g: B \longrightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ועל.

$A \subseteq B$ ולכן $g|_A: A \longrightarrow g[A] \subseteq \mathbb{N}$ חח"ע ועל.

לכן מתקיים $A \sim g[A] \subseteq \mathbb{N}$. אבל $g[A] \subseteq \mathbb{N}$, והוכחנו שכל קבוצה אינסופית המוכלת ב-$\mathbb{N}$

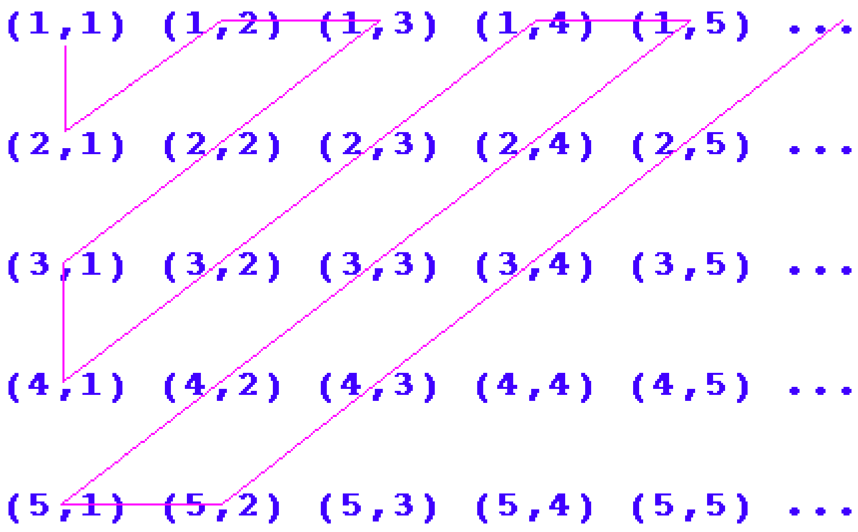
היא בת-מניה, כלומר $f[A] \sim \mathbb{N}$.

מטרנזיטיביות היחס $\sim$ נקבל ש-$A \sim \mathbb{N}$ כנדרש.

■

<u>משפט:</u> $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

<u>הוכחה:</u>



בציור לעיל אפשר לראות כי ניתן לספור את האיברים ב-$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

מספר האלכסון+ 1 נתון על ידי סכום המספרים בזוג הסדור (a,b), ומיקום הזוג באלכסון שווה ל-b.

פורמלית, נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ על ידי:

$$f(a,b) = \underbrace{\sum_{i=1}^{a+b-2} i}_{\substack{\text{Number of pairs}\\ \text{in previous diagnoals}}} + \underbrace{b}_{\text{The place in the diagnoal}}$$

כאשר הסכום בביטוי נותן את מספר האיברים באלכסונים הקודמים.

על פי הנוסחה לסכום סדרה חשבונית נקבל ש:

$$\sum_{i=1}^{a+b-2} i = \frac{(a+b-2)(a+b-1)}{2}$$

ולכן:

$$f(a,b) = \frac{(a+b-2)(a+b-1)}{2} + b$$

מהגדרת הפונקציה ניתן לראות שהיא חח"ע ועל, ולכן $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ כנדרש.

■

<u>משפט:</u> הקטע הפתוח $(0,1)$ אינו בן-מניה.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שהקטע $(0,1)$ בן-מניה.

נסמן ב-A את הקבוצה השווה לקבוצה $(0,1)$ ללא המספרים שבפיתוח העשרוני שלהם מופיעות הספרות 0,9 (זאת על מנת להימנע מכפילויות $0.3000\ldots = 0.2999\ldots$).

נראה ש-A אינה בת-מניה.

נייצג כל מספר עשרוני ב-A על ידי סדרה, כלומר על ידי פונקציה $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{1,\ldots,8\}$.

אם A בת-מניה אזי ניתן לספור את איבריה, כלומר לבנות פונקציה:

1 $1 \mapsto 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$

2 $2 \mapsto 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$

3 $3 \mapsto 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$

4 $4 \mapsto 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots$

<u>נבנה סדרה חדשה בעזרת האלכסון:</u>

$$b_n = f(n) = \begin{cases} 1 & a_{nn} \neq 1 \\ 2 & a_{nn} = 1 \end{cases}$$

בעזרת הסדרה מקבלים פיתוח עשרוני של מספר ממשי:

$$b = 0.b_1b_2b_3\ldots$$

שאינו יכול להיות אחד המספרים ברשימה שעשינו.

אם b הוא המספר ה-t ברשימה, אזי צריך להתקיים $b_t = a_{tt}$.

זוהי סתירה, כי בחרנו את b_t להיות שונה מ-a_{tt}.

לכן לא יתכן ש-A בת-מניה ולכן גם הקטע הפתוח $(0,1)$ אינו בן-מניה כנדרש.

■

משפט: אם לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה A_n בת-מניה אז $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ קבוצה בת-מניה.

הוכחה: תהא $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות בנות-מניה כך שגם הקבוצה I בת-מניה.

נוכיח עבור מקרה בו לכל $i \in I$ מתקיים $|A_i| = \aleph_0$, הקבוצות $\{A_i\}_{i\in I}$ זרות בזוגות ו-$I = \mathbb{N}$.

נראה פונקציה חח"ע $F: \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \mathbb{N}$.

ניקח את סדרת המספרים הראשוניים $P = \{2,3,5,7,\dots\}$, $|P| = \aleph_0$,

ונבנה סדרות:

$$P_1 = \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$$

$$P_2 = \{3, 3^2, 3^3, \dots\}$$

$$P_3 = \{5, 5^2, 5^3, \dots\}$$

$$\vdots$$

בצורה כזאת נקבל מספר בן-מניה של תת-קבוצות בנות-מניה אינסופיות בתוך $\mathbb{N}$ כך שהן זרות בזוגות.

לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $|P_i| = \aleph_0$, ולכן קיימת שקילות $f_i: A_i \longrightarrow P_i$ (שקילות היא חח"ע ועל).

נגדיר $F: \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} P_i \subseteq \mathbb{N}$ כאשר $x \in A_i \quad F(x) = \{f_i(x)$.

<u>נוכיח ש-F חח"ע:</u>

נניח $F(x) = F(y)$. <u>צ.ל:</u> $x = y$.

בגלל ש-$\{P_i\}_{i\in I}$ זרות בזוגות, לא יתכן ש-$f_i(x) = f_j(y)$ עבור $i \neq j$.

לכן בהכרח נקבל ש-$\exists i \in I: f_i(x) = f_i(y)$, ובגלל ש-$f_i$ חח"ע נקבל ש-$x = y$ כנדרש.

לכן מתקיים $|\bigcup_{i\in I} A_i| \leq |\bigcup_{i\in I} P_i| \leq |\mathbb{N}|$, כלומר $\bigcup_{i\in I} A_i$ בת-מניה.

עבור $\{B_i\}_{i\in I}$ קבוצות שאינן זרות בזוגות נגדיר:

$$C_1 = B_1$$

$$C_2 = B_2 \backslash B_1$$

$$C_3 = B_3 \backslash (B_2 \cup B_1)$$

$$\vdots$$

מתקיים $\{C_i\}_{i\in I}$ זרות בזוגות וכן $\bigcup_{n\in I} B_i = \bigcup_{n\in I} C_i$.

הוכחנו ש-$\bigcup_{n\in I} C_i$ חייבת להיות בת-מניה ולכן גם $\bigcup_{n\in I} B_i$ בת-מניה.

■

<u>הוכחה נוספת:</u> תהא $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות בנות-מניה.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר פונקציה $f_n:\mathbb{N}\longrightarrow A_n$ על. קיימת כזו משום שאם A_n אינסופית אזי

קיימת פונקציה $f_n:\mathbb{N}\longrightarrow A_n$ חח"ע ועל, בפרט על. אם A_n סופית אזי $A_n=\{a_1,\dots,a_k\}$

ואז נוכל להגדיר $f_n(i)=\begin{cases}a_i & 1\le i\le \mathrm{k}\\ a_1 & k<i\end{cases}$ על.

נגדיר פונקציה $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ על ידי:

$$g(x,y)=f_x(y)$$

<u>נוכיח ש-g היא על:</u>

יהא $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$x\in A_n$.

$f_n:\mathbb{N}\longrightarrow A_n$ היא על ולכן קיים $y\in\mathbb{N}$ כך ש-$f_n(y)=x$, כלומר ש-$g(n,y)=x$ כנדרש.

$$\Downarrow$$

g על ולכן $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\ge|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n|$ ומכאן שקבוצה זו בהכרח בת-מניה.

■

<u>הערה:</u> בהוכחה הנוספת הנחנו ש-$I=\mathbb{N}$. אם $I\neq\mathbb{N}$ אזי נגדיר $g:I\times\mathbb{N}\longrightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, ומכאן נקבל

ש-$|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\ge|I\times\mathbb{N}|\ge|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n|$ שהרי בכל מקרה I בת-מניה.

<u>משפט קנטור:</u> תהא A קבוצה כלשהי, אזי $|A| \neq |P(A)|$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח שלא קיימת פונקציה על $f: A \longrightarrow P(A)$.

תהי $f: A \longrightarrow P(A)$ פונקציה.

נבנה קבוצה B שאינה בתמונה של f.

$$B = \{a \in A | a \notin f(a)\}$$

נניח שקיים $b \in A$ כך ש-$f(b) = B$.

אם $b \in B$ אזי $b \notin f(b)$ לפי הגדרת B. לכן $b \in B \wedge b \notin B$ בסתירה.

אם $b \notin B$ אזי בגלל ש-$f(b) = B$ נקבל ש-$b \notin f(b)$ ולכן לפי הגדרת B מתקיים $b \in B$. קיבלנו ש-$b \in B \wedge b \notin B$ בסתירה.

כלומר $B \notin Imf$ ולכן f לא על.

לכן $|A| \neq |P(A)|$ כנדרש.

■

<u>משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין:</u> אם $|B| \le |A|$ וגם $|A| \le |B|$ אזי $|A| = |B|$.

<u>הוכחה:</u> לפי ההגדרה קיימות $f: A \longrightarrow B$ ו-$g: B \longrightarrow A$ חח"ע.

נגדיר $\hat{g}: B \longrightarrow Img$ (צמצום טווח לתמונה) על ידי $\hat{g}(x) = g(x)$ לכל $x \in B$.

$\hat{g}$ חח"ע ועל ולכן הפיכה.

נרצה לבנות פונקציה חדשה $h: A \longrightarrow B$ שמורכבת מ-f ו-$\hat{g}^{-1}$.

$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$, נגדיר $\varphi: P(A) \longrightarrow P(A)$ על ידי:

$$\varphi(K) = A \backslash g[B \backslash f[K]]$$

מתקיים:

$$C \subseteq D \Longrightarrow f[C] \subseteq f[D] \Longrightarrow B \backslash f[D] \subseteq B \backslash f[C] \Longrightarrow g[B \backslash f[D]] \subseteq g[B \backslash f[C]]$$
$$\Longrightarrow A \backslash g[B \backslash f[C]] \subseteq A \backslash g[B \backslash f[D]] \Longrightarrow \varphi(C) \subseteq \varphi(D)$$

מכאן ש-φ שומרת סדר, ולכן יש לה נקודת שבת $K \in P(A)$.

כלומר, קיימת K כך ש-$\varphi(K) = A \backslash g\big[B \backslash f[K]\big] = K$.

נפעיל משלים על שני האגפים ונקבל ש-$g\big[B \backslash f[K]\big] = A \backslash K$.

g חח"ע ולכן שקילות (כלומר חח"ע ועל) בין $B \backslash f[K]$ ו-$A \backslash K$.

f חח"ע ולכן שקילות בין $f[K]$ ו-K .

<u>נגדיר $h: A \longrightarrow B$ על ידי:</u>

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K \\ \hat{g}^{-1}(x) & x \in A \backslash K \end{cases}$$

נראה ש-h חח"ע ועל.

<u>חח"ע:</u> נניח $h(x) = h(y)$. <u>צ.ל:</u> $x = y$.

אם $x, y \in K$ אזי מתקיים $f(x) = f(y)$ ולכן בגלל ש-f חח"ע מתקיים $x = y$.

אם $x, y \in A \backslash K$ אזי מתקיים $\hat{g}^{-1}(x) = \hat{g}^{-1}(y)$ ולכן בגלל ש-$\hat{g}^{-1}$ חח"ע מתקיים $x = y$.

בהג"כ, אם $x \in K, y \in A \backslash K$ אזי $f(x) = \hat{g}^{-1}(y)$ דבר שלא יתכן שהרי $f(x) \in f[K]$ ו-$\hat{g}^{-1}(y) \in B \backslash f[K]$ בסתירה לכך ש-$f[K] \cap B \backslash f[K] = \emptyset$.

על: צ.ל: לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש-$y = h(x)$.

אם $y \in f[k] \subseteq B$ אזי קיים $x \in K \subseteq A$ כך ש-$y = f(x) = h(x)$ שהרי f על בין K ל-$f[k]$.

אם $y \in B \backslash f[k] \subseteq B$ אזי קיים $x \in A \backslash K \subseteq A$ כך ש-$y = \hat{g}^{-1}(x) = h(x)$ שהרי $\hat{g}^{-1}$ על בין $A \backslash K$ ל-$B \backslash f[k]$.

$$\Downarrow$$

$h: A \longrightarrow B$ חח"ע ועל ולכן שקילות בין A ל-B, כלומר $|A| = |B|$ כנדרש.

■

הערה: נראה שלכל פונקציה מונוטונית עולה $f: P(A) \longrightarrow P(A)$ ביחס להכלה יש נקודת שבת.

ניקח:

$$K = \bigcup_{X \subseteq f(X)} X$$

ונראה שזוהי נקודת השבת.

$K \subseteq f(K)$:

יהי $a \in K$, לכן קיים $X \in P(A)$ כך ש-$a \in X \subseteq f(X)$ ומכאן ש-$a \in f(X)$.

הפונקציה f מונוטונית עולה, ולכן אם $X \subseteq K$, אזי גם $f(X) \subseteq f(K)$ ולכן נקבל ש-$a \in f(K)$ כנדרש.

$f(K) \subseteq K$:

אנו יודעים ש-$K \subseteq f(K)$ ולכן בגלל ש-f מונוטונית עולה נקבל שגם $f(K) \subseteq f(f(K))$.

נשים לב שזהו בדיוק התנאי של האיחוד ($X \subseteq f(X)$), ולכן $f(K)$ הוא אחד האיברים באיחוד.

לכן מתקיים $f(K) \subseteq K$ כנדרש.

$$\Downarrow$$

לכן קיבלנו ש-$f(K) = K$ כנדרש.

■

<u>משפט:</u> אם $|D| = |B|$, $|C| = |\mathrm{A}|$ אז $|B^A| = |D^C|$.

<u>הוכחה:</u> לפי הנתון קימות פונקציות $f: A \longrightarrow C$, $g: B \longrightarrow D$ חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $\varphi: B^A \longrightarrow D^C$ על ידי $\varphi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.

נראה של-φ קיימת פונקציה הופכית.

נגדיר $\psi: D^C \longrightarrow B^A$ על ידי $\psi(\tilde{h}) = g^{-1} \circ \tilde{h} \circ f$.

מתקיים:

$$\psi \circ \varphi(h) = \psi\left(\varphi(h)\right) = \psi(g \circ h \circ f^{-1}) = g^{-1} \circ g \circ h \circ f^{-1} \circ f = I_B \circ h \circ I_A = h$$

$$\varphi \circ \psi(h) = \varphi\left(\psi(h)\right) = \varphi(g^{-1} \circ h \circ f) = g \circ g^{-1} \circ h \circ f \circ f^{-1} = I_D \circ h \circ I_C = h$$

ולכן:

$$\psi \circ \varphi = I_{B^A}$$

$$\varphi \circ \psi = I_{D^C}$$

מכאן ש-φ הפיכה ולכן חח"ע ועל, כלומר $B^A \sim D^C$ כנדרש.

■

משפט: $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

הוכחה: נבנה פונקציה חח"ע $f: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ המוגדרת על ידי:

$$f(a_1 a_2 a_3 a_4 \dots) = \underbrace{1 \dots 1}_{a_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_2} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_3} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_4} 0 \dots$$

נוכיח שהיא חח"ע:

נניח ש-$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. צ.ל: $f((a_n)) \neq f((b_n))$.

קיים $j \in \mathbb{N}$ המקיים $a_j \neq b_j$, והוא הקטן ביותר המקיים זאת.

בהג"כ $a_j < b_j$, ולכן לפי הבנייה במיקום $\underbrace{j}_{Counts\ zero's} + \underbrace{\sum_{i=1}^{j} a_i}_{Counts\ one's}$ של $f((a_n))$ יש 0,

בעוד במיקום זה יש ל-$f((b_n))$ את הספרה 1 (כי $a_j < b_j$).

מכאן ש-$f((a_n)) \neq f((b_n))$.

לכן $2^{\aleph_0} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0}$.

בכיוון השני $\{1,2\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ולכן $\aleph_0^{\aleph_0} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\{1,2\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$.

$$\Downarrow$$

לכן בסך הכל לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין מתקיים $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

נראה כעת כי $\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}} \sim (0,1)$ כאשר $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,\dots,9\}$.

נגדיר $g: (0,1) \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}$. ניקח פיתוח עשרוני $0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \in (0,1)$ שלא מסתיים בתשיעיות.

נגדיר $\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}} \ni (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots = g(0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)$.

g חח"ע:

אם $r_1 \neq r_2$ אזי יש להם פיתוחים עשרוניים שונים.

$$r_1 = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

$$r_2 = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

לכן קיים $j \in \mathbb{N}$ כך ש-$a_j \neq b_j$, ואז מתקיים $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \neq (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ כי האיבר ה-j של הסדרות שונה.

מכאן ש-g חח"ע ולכן $|(0,1)| \le |\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}|$.

בכיוון השני נגדיר $h: \mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}} \longrightarrow (0,1)$ על ידי $h(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = 0.a_1 0 a_2 0 a_3 0 a_4 0 \dots$.

אנו "מרפדים" באפסים על מנת להימנע מסיומת של תשיעיות.

<u>h חח"ע:</u>

$$h(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = h(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$$

$$0.a_1 0 a_2 0 a_3 0 a_4 0 \dots = 0.b_1 0 b_2 0 b_3 0 b_4 0 \dots$$

אף אחד מהמספרים לא מסתיים בתשיעיות, ולכן הפיתוח יחיד.

מכאן שהפיתוחים שווים ספרה-ספרה, כלומר $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

לכן h חח"ע ומתקיים $|(0,1)| \le |\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}|$.

$$\Downarrow$$

בסך הכל לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין מתקיים $\aleph = |(0,1)| = |\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}| = 10^{\aleph_0}$.

$$\Downarrow$$

לבסוף $\aleph = |\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}| \le |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}| = \aleph$ ולכן גם $\aleph^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$ כנדרש.

■

משפט: לכל קבוצה A מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|}$.

הוכחה: נגדיר פונקציה $g: P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ על ידי $g(B) = \chi_B = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$ (פונקציית אינדיקטור).

נראה ש-g חח"ע ועל.

חח"ע: נניח ש-$g(B_1) = g(B_2)$. צ.ל: $B_1 = B_2$.

מהנתון נובע ש-$\chi_{B_1} = \chi_{B_2}$, ולכן:

$$x \in B_1 \Leftrightarrow \chi_{B_1} = 1 \Leftrightarrow \chi_{B_2} = 1 \Leftrightarrow x \in B_2$$

מכאן ש-$B_1 = B_2$ כנדרש.

על: תהי $f \in \{0,1\}^A$. נגדיר $B = \{x \in A | f(x) = 1\}$. צ.ל: $g(B) = f$.

על פי ההגדרה $g(B) = \chi_B$.

יהי $x \in A$. אם $x \in B$ אזי $f(x) = \chi_B(x) = 1$.

אם $x \notin B$ אזי $f(x) = \chi_B(x) = 0$.

לכן $g(B) = \chi_B = f$ כנדרש.

בסך הכל קיבלנו ש-g חח"ע ועל, ולכן $|P(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|}$.

■

<u>משפט:</u> אם k_1, k_2, k_3 עוצמות אזי $(k_1 \cdot k_2)^{k_3} = {k_1}^{k_3} \cdot {k_2}^{k_3}$.

<u>הוכחה:</u> יהיו A, B, C קבוצות כך ש-$|A| = k_1, |B| = k_2, |C| = k_3$. <u>צ.ל:</u> $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

נשתמש בפונקציות ההיטל:

$$\pi_1: A \times B \longrightarrow A$$

$$\pi_2: A \times B \longrightarrow B$$

המוגדרות על ידי:

$$\pi_1(a, b) = a$$

$$\pi_2(a, b) = b$$

נגדיר פונקציה $\varphi: (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$ על ידי:

$$\varphi(h) = (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$$

נגדיר פונקציה נוספת $\psi: A^C \times B^C \longrightarrow (A \times B)^C$ על ידי:

$$\psi(f, g) = h$$

כך שהפונקציה $h: C \longrightarrow A \times B$ מוגדרת על ידי:

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

<u>נראה שהן הופכיות:</u>

בכיוון הראשון, מתקיים ש-$\psi \circ \varphi(h) = \psi(\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h) = \tilde{h}$

כאשר לפי ההגדרה $\tilde{h}(x) = (\pi_1 \circ h(x), \pi_2 \circ h(x))$.

יהי $x \in C$, אזי $h(x) = (a, b)$.

לכן:

$$\pi_1 \circ h(x) = \pi_1 \circ (a, b) = a$$

$$\pi_2 \circ h(x) = \pi_2 \circ (a, b) = b$$

ומכאן ש-$\tilde{h}(x) = (a, b)$.

בסך הכל נקבל ש-$\tilde{h}(x) = h(x)$ לכל $x \in C$, ולכן $\tilde{h} = h$ כנדרש.

בכיוון השני, יהיו $f \in A^C, g \in B^C$ פונקציות.

$$\varphi \circ \psi(f,g) = \varphi(h)$$

כאשר $h(x) = (f(x), g(x))$.

לכן לפי ההגדרה:

$$\varphi(h) = (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$$

לכל $x \in C$ מתקיים:

$$\pi_1 \circ h(x) = \pi_1\big(f(x), g(x)\big) = f(x)$$

$$\pi_2 \circ h(x) = \pi_2\big(f(x), g(x)\big) = g(x)$$

ולכן:

$$\varphi(h) = (f,g)$$

כנדרש.

$$\Downarrow$$

הוכחנו ש-$\varphi: (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$ הפיכה, ולכן חח"ע ועל.

מכאן שקיימת שקילות $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$ כנדרש.

■

<u>משפט השוואת העוצמות:</u> יהיו X,Y קבוצות, אזי $|Y| \leq |X|$ או $|X| \leq |Y|$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר קבוצה $T = \{(A,f) | A \subseteq X, \text{ חח"ע } f: A \longrightarrow Y\}$ ונגדיר עליה יחס $\leq$ המוגדר על ידי:

$(A,f) \leq (B,g) \Leftrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ g|_A = f$.

לכן $(T,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נראה שקבוצה זו מקיימת את תנאי הלמה של צורן.

- $T \neq \emptyset$, שהרי קיימת פונקציה $\emptyset: \emptyset \longrightarrow Y$ והיא חח"ע, ולכן $(\emptyset,\emptyset) \in T$.

- נראה שלכל שרשרת $C = \{(A_i, f_i)\}_{i\in I} \subseteq T$ קיים חסם מלעיל.

נגדיר $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ וכן פונקציה $f: A \longrightarrow Y$ על ידי $f(x) = \{f_i(x) \quad x \in A_i$.

<u>f מוגדרת היטב:</u>

נניח ש-$x \in A_i \cap A_j$. C שרשרת, ולכן בהג"כ מתקיים $(A_i, f_i) \leq (A_j, f_j)$.

מזה נובע ש-$A_i \subseteq A_j$ וכן $f_j|_{A_i} = f_i$, ומכאן ש-$f_j(x) = f_i(x)$ כנדרש.

<u>f חח"ע:</u>

נניח ש-$f(x) = f(y)$. לכן קיימים $i,j \in I$ כך ש-$x \in A_i, \ y \in A_j$.

לכן:

$$f(x) = f_i(x)$$

$$f(y) = f_j(y)$$

C שרשרת, ולכן בהג"כ מתקיים $(A_i, f_i) \leq (A_j, f_j)$.

$\Leftarrow A_i \subseteq A_j \Leftarrow x,y \in A_j$.

ידוע ש-$x \in A_i$ ולכן $f_j(x) = f_j|_{A_i}(x) = f_i(x)$.

מטרנזיטיביות השוויון נקבל ש-$f_j(x) = f_j(y)$, ומכך ש-f_j חח"ע נקבל ש-$x = y$ כנדרש.

$$\Downarrow$$

מתקיים $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ לכל $i \in I$, וכן $f|_{A_i} = f_i$ לפי ההגדרה, ולכן (A,f) הוא חסם מלעיל של C.

כמו כן, $A \subseteq X$ וכן הוכחנו ש-$f: A \longrightarrow Y$ חח"ע ולכן $(A,f) \in T$.

$\Downarrow$

הוכחנו שלכל שרשרת ב-T קיים חסם מלעיל ב-T ולכן על פי הלמה של צורן קיים ב-T איבר מקסימלי. נסמנו ב-(B,g).

<u>נחלק למקרים:</u>

<u>מקרה א':</u>

אם $B = X$, אזי $g: X \longrightarrow Y$ חח"ע שהרי $(B,g) = (X,g) \in T$, ולכן $|X| \leq |Y|$.

<u>מקרה ב':</u>

אם $B \neq X$, במקרה זה נוכיח ש-$g: B \longrightarrow Y$ היא על.

נניח בשלילה ש-g אינה על. לכן, קיים $y_0 \in Y$ כך ש-$g^{-1}[\{y_0\}] = \emptyset$.

יהי $x_0 \in X \setminus B$. נגדיר $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$, וכן $\tilde{B} = B \cup \{x_0\}$

ולכן מתקיים $\tilde{g}: \tilde{B} \longrightarrow Y$.

<u>נוכיח ש-$\tilde{g}$ חח"ע:</u>

נניח ש-$\tilde{g}(x) = \tilde{g}(y)$.

אם $x, y \in B$ אזי $g(x) = g(y)$ ולכן בגלל ש-g חח"ע נקבל ש-$x = y$.

אם $x, y = x_0$ אזי ברור.

בהג"כ אם $x \in B$ ו-$y = x_0$ אזי נקבל ש-$g(x) = \tilde{g}(x) = \tilde{g}(y) = \tilde{g}(x_0) = y_0$ ולכן $x \in B$, $x \in g^{-1}[\{y_0\}]$, בסתירה לכך שאין ל-y_0 מקורות ב-B.

לכן קיבלנו ש-$\tilde{g}$ חח"ע.

$\Downarrow$

$\tilde{g}$ חח"ע, $\tilde{g}|_B = g$ לפי הגדרת $\tilde{g}$, וכן $B \subsetneq \tilde{B}$. לכן $(B,g) \lneqq (\tilde{B},\tilde{g})$, בסתירה למקסימליות של (B,g).

$\Downarrow$

לכן בהכרח $g: B \longrightarrow Y$ על ומכאן ש-$|Y| \leq |B|$.

$B \subseteq X$ ולכן $|B| \leq |X|$. בסך הכל קיבלנו ש-$|Y| \leq |X|$.

■

<u>משפט המכפלה:</u> אם X אינסופית אזי $|X| \cdot |X| = |X|$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר קבוצה $T = \{(A, f) | A \subseteq X, f: A \times A \longrightarrow A$ חח"ע ועל$\}$, ונגדיר עליה יחס $\leq$ המוגדר על ידי: $(A, f) \leq (B, g) \Leftrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ g|_{A \times A} = f$.

- $T \neq \emptyset$. זאת משום שאם X אינסופית אזי $|X| \geq \aleph_0$ ולכן יש לה תת-קבוצה A מעוצמה $\aleph_0$. $|A \times A| = |A| \cdot |A| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 = |A|$ ולכן קיימת פונקציה $f: A \times A \longrightarrow A$ חח"ע ועל ואז נקבל ש-$(A, f) \in T$.

- נראה שלכל שרשרת $C = \{(A_i, f_i)\}_{i \in I} \subseteq T$ קיים חסם מלעיל.

  נגדיר $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ וכן פונקציה $f: A \times A \longrightarrow A$.

  יהיו $(x, y) \in A \times A$. לכן $x, y \in A$, כלומר קיימים $i, j \in I$ כך ש-$x \in A_i, \ \ y \in A_j$.

  נניח בהג"כ ש-$(A_i, f_i) \leq \left(A_j, f_j\right)$, ולכן $A_i \subseteq A_j$, כלומר $x, y \in A_j$ ואז נגדיר:

  $$f(x, y) = f_j(x, y)$$

  לכן f מוגדרת היטב.

  <u>f חח"ע:</u>

  נניח ש-$(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$. בגלל ש-C שרשרת אזי קיים $i \in I$ כך ש-$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A_i \times A_i$.

  לכן, מכיוון ש-f_i חח"ע נקבל ש-$f(a_1, b_1) = f_i(a_1, b_1) \neq f_i(a_2, b_2) = f(a_2, b_2)$ כנדרש.

  <u>f על:</u>

  יהא $a \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$. לכן, לפי ההגדרה קיים $i \in I$ כך ש-$a \in A_i$.

  מכיוון ש-f_i על נקבל שקיימים $(x, y) \in A_i \times A_i$ כך ש-$f(x, y) = f_i(x, y) = a$ כנדרש.

  $$\Downarrow$$

  f חח"ע ועל, וכמו כן $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X$ ולכן מהגדרת T נובע ש-$(A, f) \in T$.

  כמו כן, נובע מהגדרת היחס $\leq$ ש-$(A_i, f_i) \leq (A, f)$, ולכן לכל שרשרת ב-T קיים חסם מלעיל ב-T .

$\Downarrow$

לכן לפי הלמה של צורן קיים ב-T איבר מקסימלי, נסמנו ב-(B,g).

<u>נחלק לשני מקרים:</u>

<u>מקרה א':</u>

אם $|X\backslash B| \leq |B|$.

$$|B| \leq |X| = |(X\backslash B) \sqcup B| = |X\backslash B| + |B| \leq |B| + |B|$$

$$2|B| = |\{0,1\} \times B| = |(\{0\} \times B) \sqcup (\{1\} \times B)| = |\{0\} \times B| + |\{1\} \times B| = |B| + |B|$$

ולכן:

$$|B| \leq |X| \leq |B| + |B| = 2|B|$$

בגלל ש-B אינסופית מתקיים $2|B| \leq |B| \cdot |B|$, אבל $|B| \cdot |B| = |B|$ בגלל ש-$(B,g) \in T$.

מכאן ש:

$$|B| \leq |X| \leq |B|$$

ולכן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין מתקיים $|B| = |X|$, ומכאן נובע ש-$|X| \cdot |X| = |X|$

כנדרש.

<u>מקרה ב':</u>

אם $|X\backslash B| > |B|$.

לכן B שקולה לתת קבוצה $\tilde{B} \subseteq X\backslash B$ (זאת משום שקיימת פונקציה $f: B \longrightarrow X\backslash B$ חח"ע ואז

מתקיים $B \sim Imf = \tilde{B}$).

נרצה להגדיר פונקציה חח"ע ועל $\tilde{g}: (B \cup \tilde{B}) \times (B \cup \tilde{B}) \longrightarrow (B \cup \tilde{B})$ כך ש-$\tilde{g}|_{B\times B} = g$.

נשים לב ש:

$$\left(B \cup \tilde{B}\right) \times \left(B \cup \tilde{B}\right) = (B \times B) \cup (\tilde{B} \times B) \cup (B \times \tilde{B}) \cup (\tilde{B} \times \tilde{B})$$

ארבעת הקבוצות לעיל זרות בזוגות שהרי $\tilde{B}$ ו-B זרות.

מתקיים:

$$\left|\left(\tilde{B} \times B\right) \cup \left(B \times \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{B} \times \tilde{B}\right)\right| = \left|\tilde{B} \times B\right| + \left|B \times \tilde{B}\right| + \left|\tilde{B} \times \tilde{B}\right| =$$

$$= \left|\tilde{B}\right| \cdot |B| + |B| \cdot \left|\tilde{B}\right| + \left|\tilde{B}\right| \cdot \left|\tilde{B}\right| = 3|B| \cdot |B| = 3|B| = 3\left|\tilde{B}\right| = \left|\tilde{B}\right|$$

לכן קיימת פונקציה $h: \left(\tilde{B} \times B\right) \cup \left(B \times \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{B} \times \tilde{B}\right) \longrightarrow \tilde{B}$ חח"ע ועל.

נגדיר $\tilde{g}: (B \cup \tilde{B}) \times (B \cup \tilde{B}) \longrightarrow (B \cup \tilde{B})$ על ידי:

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & (x, y) \in B \times B \\ h(x, y) & else \end{cases}$$

$\tilde{g}$ מוגדרת היטב כי $B \times B$ ו-$\left(\tilde{B} \times B\right) \cup \left(B \times \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{B} \times \tilde{B}\right)$ זרות.

<u>נראה חח"ע ועל:</u>

<u>חח"ע:</u>

נניח ש-$\tilde{g}(a, b) = \tilde{g}(c, d)$.

אם $(a, b), (c, d) \in B \times B$ אזי $g(a, b) = g(c, d)$ ובגלל ש-g חח"ע נקבל ש-$(a, b) = (c, d)$.

אם $(a, b), (c, d) \in \left(\tilde{B} \times B\right) \cup \left(B \times \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{B} \times \tilde{B}\right)$ אזי $h(a, b) = h(c, d)$ ובגלל ש-h חח"ע נקבל ש-$(a, b) = (c, d)$.

אם בהג"כ $(a, b) \in B \times B$ וכן $(c, d) \in \left(\tilde{B} \times B\right) \cup \left(B \times \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{B} \times \tilde{B}\right)$ אזי נגיע לסתירה משום שלא יתכן ש-$g(a, b) = h(c, d)$ שהרי הטווחים של הפונקציות זרים ($g(a, b) \in B$ וכן $h(c, d) \in \tilde{B}$).

<u>על:</u>

יהא $z \in B \cup \tilde{B}$. אם $z \in B$ אזי קיים זוג סדור $(a, b) \in B \times B$ כך ש-$g(a, b) = z$ כי g על.

אם $z \in \tilde{B}$ אזי קיים זוג סדור $(a, b) \in \left(\tilde{B} \times B\right) \cup \left(B \times \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{B} \times \tilde{B}\right)$ כך ש-$h(a, b) = z$ שהרי h על.

$$\Downarrow$$

הוכחנו ש-$\tilde{g}$ חח"ע ועל, וכן לפי ההגדרה מתקיים ש-$g = \tilde{g}|_{B \times B}$.

לכן מתקיים $(B, g) \lneqq (B \cup \tilde{B}, \tilde{g})$ בסתירה למקסימליות של (B, g), ומכאן שמקרה זה לא יתכן.

$$\Downarrow$$

לכן מקרה א' חייב להתקיים ומכאן שבהכרח $|X| \cdot |X| = |X|$ כנדרש.

■