תרגיל 2 פונקציות מרוכבות תיכוניסטים

12 במרץ 2018

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z=0$ ומצאו אותו אם הוא אכן קיים. השתמשו בטכניקות שלמדנו באינפי 3.

   (א) $\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}$.

   (ב) $\frac{zRe(z)}{\overline{z}}$.

   (ג) $\frac{Im(z)}{\overline{z}}$.

2. הוכיחו כי אם f גזירה ב־z_0 אז היא רציפה ב־z_0.

3. הראו לפי הגדרה שהפונקציה $f(z)=Re(z)$ אינה גזירה בשום מקום (כלומר, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ הנגזרת $f'(z_0)$ לא קיימת).

4. f נקראת דיפרנציאבילית בנקודה z_0 אם קיים $\alpha\in\mathbb{C}$ כך שבסביבת z_0 אפשר להציג את f בצורה:

$$f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)+L(z)$$

   כאשר $\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{L(z)}{z-z_0}=0$.

   (א) הוכיחו ש־f גזירה ב־z_0 אם ורק אם היא דיפרנציאבילית ב־z_0. הסיקו שמתקיים: $f'(z_0)=\alpha$.

   (ב) תהיינה f,g גזירות בנקודה z_0 המקיימות $f(z_0)=g(z_0)=0$ ובנוסף $g'(z_0)\neq 0$. הוכיחו שמתקיים:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

   יעני לופיטל.

5. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

   (א) $f(z)=x^3+iy^3$.

(ב) $f(z)=z+Re(z)$.

(ג) $f(z)=x^3+y^5$.

(ד) $f(z)=\overline{z}e^{-17z^2}$.

6. מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$.
כלומר, מצאו $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאביליות מתאימות.

7. עבור הפונקציות $u(x,y)$ הבאות, מצאו $v(x,y)$ כך שהפונקציה

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. נסו לבטא את f לפי z.

(א) $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y$.

(ב) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+x$ (לא כולל הראשית).