

לינארית 1 - תרגיל 3 - מערכת משוואות

11.2018

בראש העבודה שלכם יש צורך לרשום את הפרטים הבאים:

1. שם מלא + ת.ז (כבר קרה שהיו שני סטודנטים עם אותו שם פרטי ושם משפחה).
2. מספר תרגיל.
3. שם מתרגל/מספר קבוצה.

תרגיל 1.

1. פתרו את המערכת הבאה בעזרת שימוש פעולות שורה בסיסיות על המשוואות וגם במקביל את המטריצה המתאימה

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 2 \end{aligned}$$

פתרון.

$$\begin{array}{l} x_1 + 7x_2 = 4 \\ -2x_1 - 9x_2 = 2 \\ \downarrow \\ x_1 + 7x_2 = 4 \\ 5x_2 = 10 \end{array} \quad 2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 4 \\ -2 & -9 & 2 \end{array} \right) \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 17 & 4 \\ & 5 & 10 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\text{לכן } x_1 = -10 \text{ ו- } x_2 = 2$$

2. ציירו את הישרים עבור המשוואות וסמנו את נקודות החיתוך.

תרגיל 2. פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} 3x + 2y + w = 4 \\ -2x + 4z - 6w = -4 \\ x + y + z - w = 1 \end{cases} \quad 1.$$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad R_3 \leftrightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad R_3 - \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נסמן $w = s, z = t$ נקבל $x = 2 - 3s + 2t, y = -1 - 3t + 4s$, לסיכום יש אינסוף פתרונות והן מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3s + 2t \\ -1 - 3t + 4s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3.

$$\begin{aligned} x + 2y + kz &= -1 \\ x - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -4 \end{aligned}$$

1. עבור המערכת קבע את ערכי k כך שלמערכת יש

פתרון.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -2 & -3 - k & -2 \\ 0 & k - 4 & -1 - 2k & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (k-4)R_2 + 2R_3 \rightarrow R_3 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -2 & -3 - k & -2 \\ 0 & 0 & (-3 - k)(k - 4) - 2 - 4k & -2(k - 4) - 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -2 & -3 - k & -2 \\ 0 & 0 & -k^2 - 3k + 10 & -2k + 4 \end{pmatrix}$$

(א) פתרון יחיד

פתרון.

יש פתרון יחיד אם $-k^2 - 3k + 10 \neq 0$ כלומר $k \neq 2, -5$

(ב) אין פתרון

פתרון.

אם נציב $k = -5$ נקבל בשורה האחרונה סתירה $0 = 14$ ולכן אין פתרון

(ג) אינסוף פתרונות

פתרון.

אם נציב $k = 2$ נקבל בשורה האחרונה $0 = 0$ כלומר שתי משוואות בשלושה נעלמים ולכן יש אינסוף פתרונות

2. הצב את הערך שקבלת בסעיף (ג) ורשום פתרון כללי של המערכת.

פתרון.

אם $k = 2$ אז מטריצה היא $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, לכן נציב $z = t$ ומכאן $y = -\frac{5}{2}t + 1$ ו- $x = 3t - 3$ כלומר הפתרון

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - 3 \\ -\frac{5}{2}t + 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{תרגיל 4. פתרו את מערכת המשוואות} \begin{cases} 3x + 5y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5. \text{ כמה פתרונות יש למערכת?}$$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) &= \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{2R_1 \rightarrow R_1} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + R_1 \rightarrow R_3}} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{2R_2 \rightarrow R_2} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &
\end{aligned}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית עם שורת אפסים. נסמן את המשתנה החופשי $z = t$, ונקבל $y = 0$, ו $x + 2t = 0$. כלומר הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{Z}_5$$

מספר הפתרונות הוא כזכור מספר האיברים בשדה בחזקת מספר המשתנים החופשיים. כיוון שב \mathbb{Z}_5 יש 5 איברים, ויש משתנה חופשי אחד, נקבל כי מספר הפתרונות הוא 5.