פתרון תרגיל בית 8 – טופולוגיה

**שאלה 1**

נתבונן בשלושה תת-מרחבים של :



ראינו בכיתה ש- אינו הומיאומורפי ל-. האם  הומיאומורפי ל- או ל-? **הוכיחו את תשובתכם!**

**פתרון**

עשינו הוכחות מלאות כאלה בכיתה ולכן כאן נרשום רק את הרעיון. הרעיון הוא שב-וב-, הוצאת **כל** נקודה לא פוגעת בקשירותו של המרחב. עם זאת ב-, ישנה נקודה **אחת** שהוצאתהּ פוגעת בקשירות (נקודת ההשקה).

**שאלה 2**

תהי  קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב  קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של ).

**פתרון**

אםסופי אז הטופולוגיה הקו-סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת-קבוצה היא סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת-קבוצה פתוחה). טופולגיה זו קשירה אם ורק אם ב- יש רק איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז  ולכן  לא קשיר).

נראה שאם אינסופי המרחב קשיר. אחרת, קיימת ב-תת-קבוצה סגוחה לא טריוויאלית.

אם סגורה ושונה מ-הרי ש-סופית. אם פתוחה ולא ריקה הרי ש-סופית. מכאן סופי וזו סתירה.

מסקנה: קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

**שאלה 3**

תזכורת – הישר של סורגנפריי. נסמן ב- את  עם הטופולוגיה הבאה :

 אמ"מ  היא איחוד של קטעים מהצורה  (כולל איחוד ריק).

1. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של  הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם  הוא תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

1. מצאו את כל הפונקציות הרציפות . כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

**פתרון**

1. יהי  תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת ונוכיח שהוא אינו קשיר. קיימות ב- לפחות שתי נקודות שנסמנן . בה"כ נניח . נגדיר . ברור ש- זרות ולא ריקות (שכן ). נותר להראות שהן פתוחות בתת המרחב . מספיק להראות ש- פתוחות ב-. מכיוון שראינו שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה האוקלידית (הסטנדרטית) על , ידוע ש- פתוחה. כעת, את  ניתן להציג כ:  ולכן היא פתוחה כאיחוד פתוחות.

מכאן, מכיוון ש- נקבל ש- לא קשיר.

1. קודם כל, הוכחתם טענה כללית לפיה פונקציה קבועה בין מרחבים טופולוגיים היא רציפה. נוכיח שאלה הן כל הפונקציות הרציפות .

נניח בשלילה שקיימת  פונקציה רציפה שאינה קבועה. מכיוון ש- קשיר, נקבל ש- הוא תת מרחב קשיר של . הפונקציה אינה קבועה ולכן ב- יש יותר מנקודה אחת, וזאת בסתירה לסעיף א'.

**שאלה 4**

הוכיחו כי  אינו הומאומורפי ל- עבור .

**פתרון**

נראה כי לכל ,  לא הומיאומורפי ל-. אם נזרוק נקודה מ- נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור  מתקיים . לעומת זאת לכל , אם נזרוק נקודה מ- נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר:  קשיר מסילתית לכל  ולכל . נתבונן בשתי נקודות. אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך  אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין ו-גם ב-.

אחרת, מכיוון ש- ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר אתו-) שעובר דרך . ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ- ונסמנה . ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין ו-( לא נמצאת על ישר זה). כמו כן,  לא נמצאת על הישר המחבר בין  ו-  ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין  ל-. אם יש מסילה ב- בין ל- וכן מסילה בין  ל- אז יש גם מסילה בין  ל-  (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאומורפיזם אז גם הפונקציה המצומצמת הייתה הומיאומורפיזם. אבל כפי שתיארנו,המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

**שאלה 5**

תרגיל (ממבחן)

יהי. הראו שאם  צפוף ב- וכןאז  איננו קשיר.

**פתרון**

תהי נקודה במשלים.

נסמן . נרצה להראות ש- הן פתוחות (ב-) זרות ולא ריקות ואיחודן נותן את .

ברור  (כי  ) ולכן הקבוצות זרות.

 הן קבוצות פתוחות ב- על-פי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב.

 לא ריקות כי  צפוף ב-.

מצאנו את הפירוק הדרוש, ולכן  אינו קשיר.

**שאלה 6**

יהי  מרחב טופולוגי ויהי  תת-מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת-מרחב , אם  אזי  קשיר.

**פתרון**

נרצה להשתמש במשפט שלפיו אם  שני תת-מרחבים כך ש- צפוף ב- וגם  קשיר, אזי  קשיר.

נרצה להראות . מתקיים  וברור כי . לכן  צפוף ב- ומקבלים הדרוש.

**שאלה 7**

יהי  מ"ט ויהיו . נתון כי  קשיר,  סגוחה (סגורה ופתוחה) וכן . הוכיחו כי .

**פתרון**

הקבוצה  פתוחה וסגורה בתת-מרחב  (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב) ומכיוון ש- ו- קשיר, נקבל  ולכן .

**שאלה 8**

יהי  מ"ט ותהיינה  תת-קבוצות סגורות. נניח כי התת-מרחבים ו- קשירים. הוכיחו ש-ו- קשירים. הדרכה: מ"ל ש-- קשיר שכן ההוכחה ש- קשיר סימטרית. הניחו בשלילה ש-כאשר  סגורות...

**פתרון**

נניח בשלילה ש- לא קשיר אזי קיימות  זרות, לא ריקות, וסגורות ב-  כך ש-. מתקייםכאשר  קשיר ו-  סגורות ב-  (מדוע?). בה"כ . מתקייםכאשר  זר ל-  (שכן  זר ל-  ו-  זר ל- ), כמו כן  לא ריקות. לבסוף, ניתן להסיק ש- סגורות ב- מכך ש סגורות ב-  וכן  סגורות ב-. כמובן שהפירוק  סותר, לאור כל מה שציינו לעיל, את קשירות .